MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER v. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR v. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

83. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER v. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR v. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

83. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

Inhalt des dreiundachtzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Hieronymus Georg Zeuthen.

Von

M. Noether in Erlangen[1]).

Der am 6. Januar 1920 verstorbene H. G. Zeuthen hat in den ersten 47 Bänden dieser Annalen vom ersten an seine hauptsächlichsten geometrischen Forschungen niedergelegt und war dabei so eng mit der ursprünglichen Richtung unserer Zeitschrift verwachsen, daß es unsere Pflicht ist, bei seinem Hinscheiden seiner hier eingehend zu gedenken. Nachdem ich früher einigen ihm verwandten Geometern hier habe Würdigungen zuteil werden lassen, übernehme ich nun auch eine Würdigung Zeuthens um so lieber, als schon seine ersten Annalenartikel mich, der ich damals analoge Tendenzen verfolgte, in wissenschaftliche und persönliche Beziehungen zu dem Forscher brachten, die bis zu dessen Tode fortgedauert haben.

H. G. Zeuthen wurde am 15. Februar 1839 in Grimmstrup, Jütland, als Sohn eines Pfarrhauses geboren. Von 1857—1862 studierte er an der Universität in Kopenhagen, ein Studium, das er mit dem Magisterexamen abschloß. Der Ruf von M. Chasles zog ihn dann 1863 nach Paris, und dort schloß er sich eng an die von Chasles vertretenen Richtungen an, sowohl an dessen anzahlgeometrische, als an die historische Richtung. Diese beiden Richtungen umschreiben auch im wesentlichen die ganze nachfolgende wissenschaftliche Betätigung von Zeuthen, und wir werden uns

[1]) Zu diesem Nachruf habe ich die in der Sitzung der Dän. Akad. d. Wiss. vom 16. Jan. 1920 von Herrn C. Juel gehaltene Gedächtnisrede auf H. G. Zeuthen als Material benutzt. Die in eckigen Klammern gesetzten Zahlen im Nachruf beziehen sich auf die Nummern des beigefügten Schriftenverzeichnisses. Auch für dieses Verzeichnis habe ich die Angaben für die Jahre vor 1868 hauptsächlich Herrn Juel zu verdanken. Für die Angaben für die Jahre 1868—1915 habe ich mich besonders des Jahrbuchs für die Fortschritte der Mathematik bedienen können, während für die vorhergehenden und die späteren Jahre keines der vorliegenden Verzeichnisse genügende Zuverlässigkeit bot, weder der Internationale Katalog der Royal Society noch das Verzeichnis in Poggendorffs Handwörterbuch.

deshalb in unserer Würdigung im wesentlichen auf diese beiden Richtungen beschränken.

Nach Dänemark zurückgekehrt, betätigte er sich sogleich in der 1859 gegründeten dänischen Zeitschrift Tidsskrift for Mathematik, in die er schon seit ihrer Gründung geschrieben hatte, mit einer größeren Reihe von kleineren Artikeln aus allen Gebieten; von 1871 an beginnend, mit der dritten Serie, übernahm er auch die Redaktion der Zeitschrift, zuerst allein, von 1883—1889 zusammen mit I. P. Gram, und in ihr veröffentlichte er von den meisten seiner vielen Aufsätze mindestens die ersten Auszüge. Auch der Nachfolgerin, der Nyt Tidsskrift, blieb er bis zuletzt ein treuer Mitarbeiter. Im Jahre 1871 wurde Zeuthen auch außerordentlicher Professor an der Universität Kopenhagen, im Jahre 1886 ordentlicher Professor daselbst, und er las bis kurz vor seinem Tode über alle Teile der Mathematik, nicht nur der reinen, sondern auch der auf die Mechanik angewandten, und über die Geschichte der Mathematik aus allen Zeiten. Zugleich hielt er lange Jahre hindurch auch Vorlesungen an der Polytechnischen Lehranstalt; von dieser Tätigkeit gibt eine Reihe von Arbeiten über allgemeine Bewegungslehre und über graphische Statik Zeugnis sowie die veröffentlichten Übungen [6], die Vorlesungen [7] über Hydrostatik und die Vorlesungen [8]. Durch diese reiche Vorlesungstätigkeit wurde Zeuthen der hochverehrte Lehrer aller jetzigen mathematischen Lehrer Dänemarks. Auch für diese Verehrung liegt ein Zeugnis vor in der wissenschaftlichen Festschrift, die ihm 1909 zum 70. Geburtstag von 13 bekannten Gelehrten des Landes gewidmet worden ist.

Im Jahre 1896 war Zeuthen Rektor der Universität, wovon die geschichtliche Rektoratsrede [11] zeugt. Sehr lange Zeit hindurch war er auch als eifriger und hochgeschätzter Sekretär der Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften tätig, in deren Schriften ebenfalls viele größere und kleinere Arbeiten von seiner Hand veröffentlicht sind.

Indem wir die mechanischen, algebraischen und analytischen Arbeiten als zurücktretend übergehen, wenden wir uns sogleich den Arbeiten der ersten der beiden Hauptrichtungen Zeuthens, der *anzahlgeometrischen*, zu. Gleich seine erste Arbeit in dieser Richtung, seine 1865 der Universität in Kopenhagen zur Promotion vorgelegte Dissertation [23], 1866 auch in französischer Sprache erschienen [23′], schließt an Chasles' Charakteristikentheorie für Kegelschnittsysteme an, gibt aber neue Gesichtspunkte, da sie davon ausgeht, zuerst die Anzahlen für die im Punkt- oder Liniensinne zerfallenden Kegelschnitte der zu betrachtenden Elementarsysteme zu ermitteln, um dann diese Anzahlen für die Bestimmung der Charakteristiken zu benutzen. Eine eingehende Auskunft über diesen Zusammenhang und den ganzen ausgebauten Kalkül der Theorie findet

man in der bekannten Abhandlung Cayleys von 1867: „On the curves which satisfy given conditions" (Philosoph. Transactions, Vol. 156 for 1868, Werke VI, Nr. 406). Dort findet man auch den Hinweis, daß Zeuthen in seiner Dissertation zum ersten Male die doppelte Ausartung einführte, welche ein Unterfall sowohl des Linienpaares als des Punktpaares ist, bestehend aus den Punkten einer doppelten Geraden und den Geraden eines doppelten Punktes, von Cayley „line-pair-point" geheißen, und die doch nach Halphen nicht drei, sondern vier Parameter enthält, neben drei kontinuierlichen noch einen Parameter, der nur rationale Werte annimmt. Zeuthen nennt in seiner Bescheidenheit dieses Gebilde in seinem Werke [5] von 1914 immer den Halphenschen Kegelschnitt, weil dieser zuerst seine Bedeutung gezeigt habe, durch Zufügung eines Gliedes zur Chaslesschen Charakteristikenformel. Dieser Erklärung einer Abweichung von der alten Charakteristikentheorie in einzelnen Beispielen schließt sich Zeuthen auch in seiner Polemik gegen Study [110], die in diesen Annalen 1890 geführt worden ist, an, ohne jedoch diese Erklärung als die einzig mögliche bezeichnen zu wollen.

Eine Ausdehnung der Charakteristikentheorie über das bisher versuchte gelang Zeuthen schon früh. Schon 1866 in [26] erscheint die Ausdehnung auf Systeme von Flächen zweiter Ordnung, 1872 [41] auf Systeme von ebenen Kurven 3. Ordnung, sowie [42] von solchen 4. Ordnung. Die letztere Theorie wurde dann in [47] eingehend verfolgt, ohne daß man bis heute darauf zurückgekommen wäre.

Chasles hatte von seiner Charakteristikenformel $\alpha\mu + \beta\nu$, wo die Zahlen μ, ν nur vom System, die α, β nur von der Bedingung abhängen, keinen Beweis gegeben, ebensowenig Cayley, auch Zeuthen damals nicht; dieses ist von Zeuthen erst in seinem Buche [5] geschehen, abgeleitet aus den sogleich zu besprechenden Korrespondenzuntersuchungen als eklatantes Beispiel der Bedeutung dieser letzteren Forschungen; vorher enthielt nur eine der letzten Arbeiten von Clebsch (Math. Ann. 6) für die fragliche Formel bei Kegelschnittsystemen einen algebraischen Beweis. Gegenüber Cayleys Untersuchungen über Charakteristikentheorie wird man die von Zeuthen zwar für weniger reich entwickelt zu erklären haben, aber neben manchem induktivem Resultat in seinem Buche [5] von 1914 diesem doch mehr Beweise von Formeln und schärfere methodische Betrachtungen zusprechen, so daß man heutzutage zum Studium der Theorie hauptsächlich auf dieses Buch verweisen muß.

Während Cayley sich hauptsächlich auf Funktionalgleichungen stützt, benutzt Zeuthen, wie gesagt, nur das *Korrespondenzprinzip*. Das zunächst auf wechselseitiges Entsprechen von Punktgruppen auf Geraden bezügliche einfache Korrespondenzprinzip war schon von seinem Urheber Chasles auf

unikursale Kurven, also auf Kurven, deren Koordinaten rational von einem Parameter abhängen, ausgedehnt worden (C. R. 1866), gestützt auf den Begriff des eindeutigen Entsprechens; Cayley gab aus reiner Induktion heraus 1868 eine Verallgemeinerung der Formel für Kurven von beliebigem Geschlecht p, durch Zufügung eines mit p proportionalen Gliedes (s. die Fortsetzung der obengenannten Arbeit, Werke VI, Nr. 407). Auch Zeuthen war es damals nicht geglückt, diese Ausdehnung theoretisch abzuleiten; aber er konnte 1870 [35] einen Satz geben, den man durch doppelte Anwendung der Cayleyschen Ausdehnung ableiten könnte, und der selbst eine Ausdehnung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechtes p einer Kurve bei 1-1-deutiger Transformation ist, nämlich einen Satz über die Beziehung zwischen den Geschlechtern zweier mehrdeutig aufeinander bezogenen Kurven, in welchen die Differenz zwischen den Koinzidenzanzahlen auf beiden Kurven (d. h. der Verzweigungsanzahlen auf beiden Kurven) eingeht. Es ist also die Ausdehnung der Riemannschen Formel $2p-2 = w - 2n$, wo n die Anzahl der Blätter, w die der Verzweigungspunkte einer Riemannschen Fläche, p die Geschlechtszahl der zugehörigen algebraischen Funktion vorstellen. Ein strenger Beweis des Cayleyschen Satzes und zwar in algebraischer Form ist erst von A. Brill (Math. Ann. **6**) gegeben worden, im Anschluß an einen Beweis einer Formel für die Anzahl der zweien Korrespondenzen auf einer algebraischen Kurve gemeinsamen Punktpaare; und noch direkter und unterer stärkerer Verwertung der Begriffe des eindeutigen Entsprechens ist Brills Beweis in Math. Ann. **7**. Das ganze Gebiet der Korrespondenztheorie zwischen den Punktsystemen einer oder zweier Kurven gehört ja in das Gebiet der Eigenschaften, welche bei rationalen Transformationen invariant sind; schon bei der Ausdehnung des ursprünglichen Korrespondenzprinzips auf der Geraden auf die Punktgruppen einer rationalen Kurve hat Chasles dies erkannt; das Prinzip ist aber geeignet, alle Verhältnisse, welche durch singuläre Stellen der Grundkurve oder durch spezielle Lagen der einander entsprechenden Punkte sich komplizieren, übersichtlich aufzufassen und ohne Schwierigkeiten zu erledigen. Auch Zeuthen hat in [112] (1892) das Prinzip zu einem Beweis des allgemeinen Korrespondenztheorems benutzt; und dabei hat er noch einen weiteren Beweis zugefügt, indem er für die allgemeine Kurve vom Geschlecht p den Einfluß untersuchte, welchen die Zufügung eines weiteren Doppelpunktes an der Formel bewirkt, und so die Frage sukzessiv auf den bekannten Fall der rationalen Grundkurve zurückführte. In seinem Buche [5] § 111 hat er dann den Beweis von [112] noch verbessert und in dieses Buch auch die ganze Literatur über den Korrespondenzsatz aufgenommen. Auch hat er [ibidem] §§ 119 und 124 den Weg angezeigt, um *alle* Korrespondenzen, auch die mit ne-

gativer oder gebrochener „Wertigkeit" zu erledigen und diesem letzteren Begriff auch die Hurwitzschen „singulären" Korrespondenzen einzuordnen.

Als eine Fortführung der Begriffe über eindeutige Transformation der Gebilde, aber auf das viel kompliziertere Gebiet der *Flächen*, ist eine sich anschließende Reihe von Arbeiten, [34] von 1870 sowie [37] bis [39] von 1871 wie auch [60], [62] von 1876, anzusehen, welche die geometrisch-algebraische Kraft Zeuthens im hellsten Lichte zeigen, und welche am meisten zur Bedeutung seines Namens beigetragen haben, um so mehr als sie auch die Polarentheorie stark gefördert haben. Man sieht in ihnen deutlich, daß der Gesichtspunkt der rationalen Transformationen den innersten Kernpunkt des Zeuthenschen Arbeitsgeistes bildet, und daß aus dieser Beschäftigung seine feine und scharfe Erfassung und Fassung von komplizierten geometrischen Einzelheiten, wie sie zu jener Zeit höchstens einigen Algebraikern oder Analytikern an der Hand von Reihenentwicklungen sich erschlossen hatten, erwachsen ist. Diese Einzelheiten boten sich in besonderer Fülle und Mannigfaltigkeit beim Entsprechen von Fundamentalpunkten und -kurven auf Flächen dar; an ihnen entwickelte sich Zeuthens eingehendes geometrisches Verständnis und seine scharfe geometrische Bezeichnungsweise, die sich auch unmittelbar in analytische Formeln übertragen läßt, wie auch umgekehrt jeder analytische Ausdruck sich in die geometrische Sprache umsetzen läßt. Vergleicht man damit die unbestimmte und sorglose Sprache der Geometer der damaligen und auch späteren Zeit, so erkennt man erst das große, noch nirgends hervorgehobene Verdienst Zeuthens um die allgemeine Ausbildung der Geometrie, auf das der Berichterstatter um so lieber hinweist, als er in derselben Richtung zu wirken bestrebt war und sich dabei gern als Schüler Zeuthens in jener Richtung bekennt[9]).

Die Hauptarbeit in dieser Richtung ist [38], die Verallgemeinerung der Operationen von [35], während [37], eine Feststellung der Verhältnisse bei vielfachen Geraden einer Fläche, nur als Vorbereitung der Aufgabe von [38] anzusehen ist, die bei eindeutigen Punkttransformationen zwischen zwei Flächen invarianten Zahlenrelationen zu ermitteln. Der Beweis für die Erhaltung der Geschlechtszahl p bei zwei Kurven ließ sich nach Zeuthen, Clebsch und Bertini dahin fassen, daß man die Transformation zwischen zwei Kurven durch zwei sukzessive Transformationen ersetzt, welche je eine der beiden Koordinaten festlassen; und in einer solchen einfacheren Transformation hat man nur aus den, einem von einem Punkt der Ebene

[9]) Ich erlaube mir dabei, auf meine Noten in Math. Annalen 56 und in dem Chicago Congress Math. Papers hinzuweisen, in welchen besonders die von Anfang an so notwendige scharfe Unterscheidung zwischen „koinzidierenden" und „konsekutiven" Punkten einer Kurve betont wird.

an die Kurve gehenden Tangentenbüschel zugehörigen Zahlen (der Anzahl der beweglichen Punkte der Geraden des Büschels und der Anzahl der eigentlichen und uneigentlichen Tangenten des Büschels, den Zahlen n und w in der obigen Riemannschen Formel $w - 2n = 2p - 2$) eine solche Kombination p zu bilden, welche sich bei Änderung des Scheitels des Büschels nicht ändert. Genau so geht Zeuthen bei zwei Flächen vor, hier nur mit Einschieben zweier neuer Flächen unter Betrachtung der Anzahlen, die zwei Tangentenkegel an eine Fläche betreffen, wobei die Schwierigkeit nur in der genauen Bestimmung der Singularitätenzahlen dieser Kegel bei allgemein und bei speziell gelegenem Scheitel liegt. Es gelingt Zeuthen auch hier, zunächst eine bei Verlegung des Scheitels invariante Kombination zu finden, eben die Geschlechtszahl p, welche schon von Clebsch und mir (Math. Ann. 2) angegeben war. Aber Zeuthen findet zugleich noch eine zweite Kombination, welche zwar nicht völlig invariant ist, insofern in die Transformationsformel noch die Anzahlen der einfachen Fundamentalpunkte der beiden Flächen eintreten. Sie erscheint daher als neue Invariante nur gegenüber Transformationen, bei denen überhaupt keine einfachen Fundamentalpunkte auf beiden Flächen auftreten, sie ist eine „relative Invariante“. Auch Segre hat auf anderm Wege diese Halbinvariante gefunden, und so nannte man sie „Zeuthen-Segresche Invariante“; ihre Auffindung stellt die Hauptleistung Zeuthens in der Theorie der algebraischen Flächen dar. Dem Berichterstatter ist es später (Math. Ann. 8) gelungen, die nicht-invarianten Glieder der Zeuthenschen Formel mittels Beziehung der Fundamentalpunkte zu den zu der Fläche zugehörigen invarianten „Flächen φ“, negativ genommen, durch Invarianten zu ersetzen, und so eine völlig invariante Zahl p zu erhalten, aber diese Arbeit (Math. Ann. 8) ruht doch völlig auf der Zeuthenschen Arbeit. Es war nur natürlich, daß meine eigenen Bestrebungen mit denen von Zeuthen eng zusammenstießen.

Interessant ist in dem Aufsatz [38] auch die Anwendung auf Abbildungen von Flächen auf Doppelebenen, in [39] die auf Überführung einer Fläche in ihre reziproke. In dieser letzteren Arbeit läßt Zeuthen einige Glieder als noch nicht hinreichend untersucht weg, da er verlangt, daß jede der eingeführten Singularitäten nicht nur vom Punktstandpunkt aus, sondern auch vom dualen Standpunkt genau festgestellt werde. Es ist dies ein Zeichen, welche Anforderungen Zeuthen an seine Beweise stellte, und zugleich ein Beweis für seine Redlichkeit: es war ihm natürlich, sich zu einer Lücke oder gar einem Fehler zu bekennen, sobald er sie eingesehen hatte. Diese Wahrheitsliebe hat Zeuthen immer betätigt: die Sache ging ihm immer vor der Person. Auch in den Polemiken, zu denen Zeuthen mehrfach Veranlassung hatte, läßt sich bei ihm derselbe

sachliche Zug erkennen; er blieb immer in streng objektiven Grenzen, auch wenn es auf der Gegenseite nicht der Fall war: eine wahrhaft vornehme Natur.

Die Betrachtungen über Reziprokalflächen hat Zeuthen 1876 in [60], [62] zu einem befriedigenden Abschluß gebracht, indem er nicht nur die Formeln von Salmon und Cayley wiedergibt, sondern sie auch beträchtlich auf außerordentliche Singularitäten ausdehnt, die nicht jede Fläche, sei es von dem einen oder andern Standpunkt, „im allgemeinen“ aufweist. Über die Resultate dieser Autoren geht Zeuthen auch darin hinaus, daß er die Singularitätszahlen völlig sicher festlegt, mit Methoden vielfach analytischer Art, die auch die Weiterführung auf noch höhere Singularitäten gestatten würden*). Schon früher, 1868, in [29] und [33] hatte Zeuthen, bei analogen Untersuchungen über die Singularitätengleichungen der Raumkurven, seinen Namen an die von Cayley und Salmon gebunden, indem er auch hierbei deren Resultate mit dem einfachen Korrespondenzprinzip bedeutend erweitert hatte.

Eine andere Reihe von geometrischen Arbeiten aus derselben Zeit zeigt Zeuthen von einer neuen Seite: eine starke intuitive Kraft, die ihn zur Aufdeckung von *gestaltlichen* Verhältnissen bei Kurven und Flächen führt. Diese Tätigkeit führt aber in ihrem Ursprung auf die oben besprochene Beschäftigung mit der Charakteristikentheorie zurück. In der großen Abhandlung [47] von 1873 über Systeme von Kurven vierter Ordnung war es nötig geworden, die Singularitäten mit Kontinuitätsbetrachtungen zu verfolgen, indem es darauf ankam, unter den ausgearteten Lösungen einer Aufgabe die „eigentlichen“ Lösungen zu erkennen, was nur dadurch möglich war, daß das Auftreten von sogen. „Scheiteln“ gestaltlich beobachtet wurde, von denen ein jeder in einen doppelten Punkt (im Sinne der Liniengeometrie) übergehen kann.

Die Grundarbeit für die Aufzählung der verschiedenen Gestalten der ebenen Kurven vierter Ordnung (ohne mehrfache Punkte) ist die in diesen Annalen erschienene Abhandlung [50]. Von früherer Literatur werden nur allgemeine Betrachtungen von Plücker und von Staudt benutzt. Die Einteilung geschieht hauptsächlich nach dem Verhalten der Kegelschnitte, welche durch die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten *eines* Zuges gehen (die imaginären inbegriffen), wobei zunächst 13 Klassen unterschieden, daraus aber 36 verschiedene Formen von Kurven vierter Ordnung abgeleitet werden, von denen sämtlich auch die Existenz nachgewiesen

*) Merkwürdigerweise erwähnt die neueste Darstellung der Theorie von H. W. E. Jung „Über algebraische Flächen“ J. f. Math. 150 die Zeuthenschen Verallgemeinerungen der früheren Theorie überhaupt nicht, so daß es unentschieden bleibt, ob sie benutzt worden sind.

wird. Auch die Formen der Kurven vierter Ordnung mit Doppelpunkten werden erledigt; und weiter wird von da die Untersuchung der Gestalten der allgemeinen Flächen dritter Ordnung erledigt, indem sie mit Geiser durch Projektion von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene, die eine Doppelebene mit Übergangskurve vierter Ordnung wird, auf jenen Fall zurückgeführt werden. Auch hier (s. auch [51]) ergeben sich alle möglichen Gestalten und Realitätsverhältnisse der Geraden der Fläche, und es werden alle Resultate von Schläfli wieder erhalten, sowie die von Klein (Math. Ann. 6), der einen ganz anderen Ausgangspunkt genommen hatte. Die Methode von Zeuthen ist besonders dadurch einfach, daß außer dem einen Fundamentalpunkt, der Projektionspunkt auf der Fläche ist, keine weiteren Fundamentalpunkte in der Abbildung auftreten.

Viel später [97] hat Zeuthen auch die Gestalten der Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt abgeleitet.

Dieser ganze, in sich geschlossene Kreis von geometrischen Forschungen fällt, sich in immer intensiverer Weise aussprechend, in das erste Jahrzehnt von Zeuthens Schaffenswerk. Damit ist aber auch der Höhepunkt in seinem geometrischen Schaffen erreicht; nur haben wir noch eines nachzutragen.

1874 hat in [56] Zeuthen das Korrespondenzprinzip von Kurven auf Ebene und Raum ausgedehnt, was freilich teilweise schon von Salmon (Raumgeometrie von 1868) vorausgenommen war. Diese Ausdehnung beruht auf einfacher Anwendung des gewöhnlichen Chaslesschen Prinzips, auch im Falle, daß unendlich viele Punkte existieren, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen.

Was nun folgt, betrifft entweder vereinzelte Fragen, oder es sind Arbeiten, welche frühere Ideen nur ausführen; ein größeres neues Gebiet wird nicht mehr beschritten. Nicht als ob die späteren Leistungen, die wieder etwa 1909 einsetzen, gegenüber den früheren durchaus zurückblieben; im Gegenteil: hat doch Zeuthen noch im Greisenalter 1914 sein großes Werk [5], das wir schon mehrfach zu erwähnen Gelegenheit hatten, erscheinen lassen können. Aber auch hier fehlt die Fortentwicklung, wenn auch nicht die Umgestaltung, seiner Ideen; über die übrigen geometrischen Leistungen Zeuthens können wir uns kurz fassen.

Eine Reihe von kleineren Arbeiten sind der Konstruktion des 8. Schnittpunktes der durch 7 gegebene Punkte gehenden Flächen 2. Ordnung gewidmet, und der Betrachtung der Konfiguration dieses Oktupels von Punkten, von dem analoge Eigenschaften nachgewiesen werden zu denen, wie sie das erweiterte Pascalsche Sechseck eines Kegelschnitts bietet. Die Grundarbeit in dieser Richtung ist der Aufsatz [79] (1881), sie schließt also auch an Zeuthens frühere Richtung auf das Korrespondenzprinzip an,

das nur von der Ebene durch Abbildung auf die Fläche 2. Ordnung übertragen ist, wobei jene Betrachtungen nur als Anwendung auftreten. Fortgeführt sind sie in [82] (1882), [96] (1886) und [105] (1889).

Ein weiterer Gedankenweg Zeuthens versucht, die Abzählungen für Schnittpunktsätze, wie sie etwa Cayley vorgenommen hatte, zwar beizubehalten, aber auf eine strengere Form zu bringen. Obwohl ihm das gelungen ist, wird man doch das Verfahren Zeuthens gegenüber dem algebraischen des Berichterstatters noch nicht als befriedigend anerkennen können. Endlich ist noch ein Beitrag zum Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie [127], [128] zu nennen.

Beim Überreichen seines geometrichen Hauptwerkes [5] von 1914 an die Dänische Akademie der Wissenschaften sprach sich Zeuthen unter dem Titel „Über Anwendung von Rechnung und Raisonnement in der Mathematik" [155] selbst über seine Arbeitsweise aus. Er knüpft an Aussprüche seiner beiden ersten Universitätslehrer Ch. Jürgensen und A. Steen an, von denen der erstere die Mathematik als eine Trägheitswissenschaft bezeichnete, der zweite ein mathematisches Resultat nicht eher als wohlbegründet erklärte, bis es durch Rechnen vollgesichert erscheine („Rechnung" im weitesten Sinne genommen). Beide Aussprüche regten ihn an, der erste, obwohl Zeuthen nicht zur Trägheit veranlagt war; aber er wünschte, die Resultate auf möglichst kurzem Wege zu erlangen, vor allem jede weitläufige Rechnung zu umgehen, und diese Ziele suchte er auf dem Konstruktionswege zu erreichen mit rein geometrischen Lösungen durch Konstruktionen, welche zugleich mehr Einsicht in das Wesen des Problems geben als der Rechnungsweg, und sich dann auch als einfacher herausstellen. Dieses Ziel hat Zeuthen dann sein Leben hindurch verfolgt von den ältesten Problemen der griechischen Mathematik an bis zu den neuesten Forschungen, und oft mit ausgezeichnetem Erfolg.

Dem zweiten Ausspruch stand Zeuthen widerstrebend gegenüber; er erkannte die Gefahr, von dem System der Rechenformeln und -symbole mechanisch abhängig zu werden, anstatt mit dem Gedanken über den Rechenmethoden zu stehen und den Problemen begrifflich ins Auge zu sehen und die Methoden selbst erst nach ihnen zu formen. Hätte er das geflügelte Wort O. Hesses gekannt: „Die Mathematik ist die Wissenschaft, das Rechnen zu vermeiden", er hätte dieses Wort wohl sich zu eigen gemacht. Aber da er so an seinem Wege festhalten wollte, fühlte er den Worten Steens gegenüber nur die Verpflichtung, auch seinen Weg gegen jeden Einwand möglichst sicherzustellen, und seinen Resultaten einen ähnlichen Grad von Zuverlässigkeit zu geben, wie ihn die Rechnung beanspruchen konnte. So entstand sein Bemühen, in seinen Forschungen neben der Einfachheit auch immer größere Klarheit und Strenge zu er-

zielen, und er verschmähte dazu bei Einzeluntersuchungen auch nicht die Verwendung algebraischer und analytischer Methoden, nur daß diese nicht die Grundlage seiner Forschungen bilden durften, als welche ihm immer die Induktion galt: nur gepaart mit strenger Selbstkritik, die er bei manchen seiner Vorgänger, deren richtige Resultate mehr ihrem „bon sens" zuzuschreiben waren, schwer vermißte. Zeuthen arbeitete mit der *Intuition*, für ihn eine Art Gesamtheitsauffassung, welche alle Einzelheiten des Gegenstandes seiner Forschung schon in sich faßt, und damit durchdrang er auch diese Einzelheiten. Besonders deutlich ist dies in seinem Lehrbuch [5] der Fall, das zwar die Geometrie nach allen Richtungen durchforscht und einen Überblick über das ganze Gebiet eröffnet, das aber doch im wesentlichen nur *Regeln* für alle möglichen Vorkommnisse gibt, keine eigentlichen *Beweise*. Wer sich in die Einzelheiten dieser Untersuchungen vertieft hat, wird aber bei abzählenden Fragen selten in Zweifel über ihre Behandlung kommen. Nur von einer in den letzten Jahren oft erörterten Frage der abzählenden Geometrie kann man nicht sagen, daß sie eine völlig befriedigende Lösung gefunden hat, auch durch Zeuthen nicht, dessen letzte Arbeit [161] (1919) ihr gewidmet ist: die Frage, wie unendlich viele Lösungen, die bei einem Problem mit im allgemeinen endlich vielen Lösungen im speziellen Falle eintreten, die Anzahl der endlich vielen eigentlichen Lösungen modifizieren? Es kommt vor, daß diese Anzahl ganz unberührt bleibt, und dies soll nach Zeuthen davon herrühren, daß die beiden Arten von Lösungen zu verschiedenen Faktoren der Resultante gehören, von denen durch die Spezialisierung nur ein Faktor berührt wird. Diese Erklärung, abgesehen davon, daß sie nur eine Umschreibung ins Algebraische ist, ist aber nicht erschöpfend, indem die Spezialisierung an den Eliminitationsprozessen, nicht nur erst in der Schlußresultante vorzunehmen ist, sondern schon im Laufe der Prozesse, so daß das spezielle Problem eigentlich ganz unabhängig vom allgemeinen zu behandeln wäre. Die dabei gegebene geometrische Erklärung mag für die an $p-1$-Stellen eine Kurve vom Geschlecht p berührenden Kurven φ im hyperelliptischen Fall für $p=3$ zutreffen; wie soll man aber für $p>3$ damit als Resultat erhalten, daß die unendlich vielen Lösungen als eigentliche Lösungen mitzählen oder nicht mitzählen, je nachdem der Grad der Unendlichkeit ein gerader oder ein ungerader ist (wie schon für $p=5$ beide Fälle vorkommen)?

Da sich Zeuthens induktive und intuitive Art zu denken über das ganze Werk [5] erstreckt, ist es geeignet, in dem Leser nach und nach dieselbe Anschauung hervorzurufen und durch die Umfassung eines so großen Materials das Gefühl der Richtigkeit und Zuverlässigkeit so weit zu entwickeln, daß ein rein deduktiv gehaltenes Werk nicht eindringlicher wirken könnte.

Das Werk [5] ist nur in deutscher Sprache erschienen. Es gehört somit zu unserer deutschen mathematischen Literatur und wird von hier aus trotz der entgegenstehenden Widerstände in die Weltliteratur eindringen; diese Gabe eines Ausländers an unsere Literatur soll Zeuthen hoch angerechnet werden.

Auf die erste zehnjährige geometrische Periode folgt bei Zeuthen zunächst ein zehnjähriges Zwischenstadium, ausgefüllt mit Arbeiten über Mechanik, mit Lehrbüchern geometrischen oder mechanischen Inhalts und mit dem Enzyklopädiebericht über abzählende Methoden [141], hierin aber anschließend eine *mathematisch-geschichtliche* Periode, die Zeuthens Arbeitkraft bis etwa 1909 in Anspruch nahm und während des letzten Lebensjahrzehnts neben der zweiten geometrischen Periode herlief. Auch durch die ganze historische Periode hindurch hat sich Zeuthen die alte mathematische Schärfe und Kritik zu bewahren gewußt, wie sein geometrisches Alterswerk [5] beweist.

Wenn jetzt die historische Tätigkeit Zeuthens näher betrachtet werden soll, so werde ich mich, da mir diese Tätigkeit ferner steht als die geometrische, auf einen kurzen Überblick beschränken müssen.

Die ersten Schritte auf diesem Gebiet geschahen nur zögernd in einigen kurzen Noten von 1876 bis 1883 [59], [85], [90], unter dem gemeinsamen Titel „Fra Mathematikens Historie" in seiner Tidsskrift veröffentlicht: Über indische Geometrie, über diophantische Aufgaben usw. Aber 1885 holt Zeuthen zu einem Hauptschlager aus, es erscheinen in den Abhandlungen der Dänischen Akademie die „Kegelsnitslæren i Oldtiden" (eingereicht 1884), ein Jahr darauf auch in Deutsch als selbständiges Werk in Kopenhagen herausgegeben unter dem Titel: „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum", über 500 Seiten groß. Der Inhalt ist nicht mehr und nicht weniger als der Nachweis, daß das Buch des Apollonius von Perga über die Kegelschnitte, bald nach Euklids Elementen geschrieben, eine förmliche *analytische* Geometrie der Kegelschnitte unter Koordinatenbenutzung und mit einem Äquivalent für algebraische Rechnung enthält: eine Entdeckung, welche alle unsere bisherigen Begriffe über die Entwicklung der alten und der neueren Mathematik über den Haufen wirft. Und sie ist so wohlbegründet, daß sie kaum mehr eine Hypothese genannt werden kann. Die Koordinaten bestimmen als zwei lineare variable Parameter die Punkte der Kurve, ebenso wie in unseren auf zwei durch einen Brennpunkt gehenden Achsen ausgedrückten Kegelschnittsgleichungen. Und wenn auch die Rechnung noch nicht mit den neueren algebraischen Symbolen geführt sein kann, so bietet sie doch vollen Ersatz dafür, indem sie geometrische Größen dafür benutzt und diese in Form einfacher geometrischer Prozesse

verknüpft, wie Teilung von Rechtecken und Wiederzusammensetzung zu Flächen, eine Operation, die von den Griechen zur numerischen Auflösung der quadratischen Gleichungen verwendet worden ist. (Nach [3'] S. 25 oder S. 19 leistet Buch VI, 28 oder Buch II, 5 der „Elemente" die Auflösung der quadratischen Gleichung $ax - x^2 = b^2$.) Diese Auffassung einer *geometrischen* Algebra hatte übrigens schon P. Tannery vorbereitet, und sie wurde in Zeuthen durch Beschäftigung mit Tannerys Arbeiten angeregt; sie ist auch in Deutschland geäußert worden, von Nesselmann und selbst von M. Cantor, und sie hat wohl keine Gegnerschaft.

Für die Griechen — und dies ist ein weiterer Punkt, auf den Zeuthen immer wieder hingewiesen hat — war eine solche *geometrische* Algebra schon aus dem Grunde nötig, weil sie auch die irrationalen Größen beherrscht, während die Arithmetik nur die rationalen Zahlen besaß; gerade dieser Umstand bewirkte es ja auch, daß man die geometrischen Methoden allein als strenge erklärte, während den arithmetischen Methoden die Existenzbeweise fehlten.

Die geschichtlichen Untersuchungen von Zeuthen sind, im Gegensatz zu denen von M. Cantor, nicht nur literarische, lediglich auf Urkunden gestützte, sie bedienen sich der philologischen Methoden, mit denen Zeuthen völlig vertraut war, nur als Hilfsmittel; darüber hinaus war ihm das wesentliche, sich in den Geist der Methoden der Alten mathematisch so einzuleben, daß er auch wagen konnte, Hypothesen über Entstehung und Tragweite der Methoden aufzustellen. Gegen diese Richtung Zeuthens, die im Geschichtlichen genau das Entsprechende vorstellt zu seiner induktiven Richtung im Geometrischen, sind von den philologisch gerichteten Historikern der Mathematik natürlich Einwendungen erhoben worden (vgl. z. B. die Verteidigung [119]), die aber die starke Überzeugungskraft nicht leugnen konnten, welche von diesen Arbeiten Zeuthens ausgeht. Als beste Antwort auf diese Anschuldigungen wollen wir hier einige Worte anführen, die Zeuthen bezüglich Paul Tannery, welcher dieselbe Tendenz verfolgte, und der Zeuthen in seinen geschichtlichen Arbeiten als Vorbild gedient hatte, in einem Nachruf auf diesen Forscher [139] (1905) gebrauchte, und die wörtlich auch auf ihn selbst anwendbar sind: „P. Tannery war ein genügend tiefer und feiner Geometer, um sein Denken unabhängig zu machen von den aktuellen Formen der Mathematik und es den antiken Formen so anzupassen, daß er aus eigener Erfahrung den Wert der Hilfsmittel und die Tragweite der Verfahrungsweisen beurteilen konnte, über die man in den vergangenen Zeiten verfügte. Daher wußte er sich auch von jeder Klassifikation freizumachen, die der modernen Mathematik entlehnt wäre; so verstand er z. B. in der antiken Geometrie die Grundlagen einer Algebra aufzufinden, die unmittelbar anwendbar war auf arithmetische Fragen".

Zeuthen stützt sich zwar auf alte urkundliche Belege, aber er baut nicht ausschließlich auf sie, sondern auch auf seine mathematische Einsicht, die bis zu den fernsten voreuklidischen Zeiten dringt; er findet bei Apollonius nicht nur Zusammenhänge mit der analytischen Geometrie, sondern auch mit der projektiven Erzeugung der Kegelschnitte.

Zeuthen verfolgt in einer ganzen Reihe von Arbeiten, so [138], [144], [146], [153], vor allem in der großen Abhandlung [158] die Entwicklung der griechischen Mathematik, der Geometrie und der Arithmetik von Euklid zurück bis zu den Pythagoräern. Es gelingt ihm, alle sukzessiven Stadien in den Methoden festzulegen, alles aus den spärlichen Notizen über solche Resultate in der griechischen Literatur von Plato rückwärts, auch bei den griechischen Kommentatoren, denselben Notizen, die auch Cantors Werk zugrunde liegen, nur daß Zeuthen überall über sie hinausgeht und aus den Resultaten Schlüsse auf den Stand der Methoden zieht, welche solche Resultate möglich gemacht haben konnten. Das Hypothetische dieses Aufbaues ist ja nicht zu leugnen, aber nicht nur ist der Grund fest, auch die einzelnen Glieder des Baues stützen einander gewölbartig. Wie frei Zeuthen das Werkzeug der Griechen, dessen sich noch Newton bediente, das aber seitdem eingerostet war, zu handhaben wußte, zeigt Note [144].

Vom Altertum aus wendet sich Zeuthen in einem zweiten größeren Werk [3'] (1896) (drei Jahre vorher in dänischer Sprache [3] erschienen) der folgenden Zeit zu, bis zu derjenigen neueren Zeit, in der die direkten oder durch die Araber vermittelten Einflüsse der griechischen Mathematik aufhören, nämlich bis gegen das 16. Jahrhundert hin, dem in Verbindung mit der Mathematik des 17. Jahrhunderts Zeuthen noch ein besonderes Werk [4] (1903) gewidmet hat (siehe auch [4']). [3] ist also als eine Art Brücke zwischen [2] und [4] anzusehen, denn [3] behandelt die Einwirkungen des griechischen Geistes auf die Zeit des Mittelalters, die in mathematischer Beziehung ausschlaggebend waren; es behandelt die allmähliche Aufnahme des großen Stoffes, der teils in griechischer Sprache im Original zugeführt, teils durch die Araber vermittelt wurde, wozu sich das gesellte, was die Araber selbst in Gleichungen zweiten Grades geschaffen hatten oder was sie von den indischen Rechnern wußten. Die selbständige Verarbeitung und Vertiefung des Stoffes bei den Westvölkern beginnt erst mit der Zeit, der [4] gewidmet ist. Dieses Werk vor allem ist nicht ein historisches in dem Sinne, wie man es sonst zu nehmen gewohnt ist: eine Feststellung und Registrierung von Einzelheiten; es ist im historischen Gewande ein *mathematisches* Werk, das sich an Mathematiker wendet, um ihnen ihre Methoden im Entstehen zu zeigen und dadurch von neuer Seite nahe zu bringen. Ein großer Teil ist Vieta und Descartes gewidmet, nicht

nur in der Algebra und analytischen Geometrie, sondern auch in der Analysis des Unendlichen; aber diese wird durch alle großen Namen hindurchgeführt, von Kepler und Galilei bis auf Newton und Leibniz. Besonders flüssig geschrieben und eindrucksvoll ist die reiche, 80 Seiten starke Einleitung, welche die chronologischen und biographischen Daten gibt und eine Übersicht über die ganze behandelte Zeit gewähren soll. Die Darstellung beruht überall auf eigenen Forschungen, die in zahlreichen kleineren Veröffentlichungen vorhergegangen waren; so seien die über J. Barrow hervorgehoben [125] und [129], den Lehrer Newtons und Vorgänger auf dessen Lehrstuhl in Cambridge, den Zeuthen als den eigentlichen bewußten Entdecker des inversen Charakters der beiden Probleme, des der Tangenten und des der Quadratur, d. h. der Differential- und der Integralrechnung, hinstellt, eine Entdeckung, die Zeuthen überhaupt als das Fundament der Erfindung des Infinitesimalkalküls ansieht und die auch Newton beeinflußt habe. Wenn man sich den Würdigungen Zeuthens in dieser Einleitung im allgemeinen voll anschließen kann, so erleidet das vielleicht eine Einbuße bei der von Leibniz, die zum mindesten nicht von Voreingenommenheit für den deutschen Philosophen spricht.

Von allen weiteren historischen Einzelforschungen Zeuthens möchten wir nur noch auf die über Archimedes hinweisen, dessen Herausgabe seinem Freunde Heiberg zu danken ist, zusammen mit ihm selbst [143], [144]. In [143] gibt Zeuthen den Kommentar zu einer verloren geglaubten von Heiberg wieder entdeckten Schrift des Archimedes, einem Fund, der in unverhoffter Weise eine „Hypothese" von Zeuthen in tatsächliche Wirklichkeit umsetzte. Bei diesem Anlaß kämpft Zeuthen gegen gewisse neuere Benennungen, die er für ungeschichtlich hält, so das „Archimedische Prinzip", das schon bei Euklid erscheine und von dessen Vorgänger Eudoxos herrühre [140]. Bei Euklid wird es ausdrücklich als Postulat eingeführt, und so könnte der ganze vorhergehende Teil der „Elemente" als nicht-archimedisch bezeichnet werden. Ebenso wird die Bezeichnung „nichteuklidische Geometrie" verworfen, weil Euklid selbst das Parallelaxiom nur als fünftes Postulat einführt, jene Geometrie also eigentlich gerade dem Sinn von Euklid selbst entspreche. Auch gegen die Verwendung des Ausdruckes „Pascalscher Satz" für einen speziellen Fall des allgemeinen Pascalschen Satzes kämpft er. Er wünscht auch im Historischen die Strenge der Alten, die unter anderem einen Satz dem allein zuschrieben, der ihn bewiesen und damit seine Existenz gezeigt habe, während der ursprüngliche Entdecker nicht einmal zitiert wurde.

Wir wollen unseren Bericht nicht schließen, ohne nochmals der Persönlichkeit Zeuthens in Verehrung zu gedenken. Ich hebe seine immer hohe, gleichmäßige Gesinnung hervor, auch in politischen Dingen, wo er

aufs innigste die Versöhnung der feindlichen Geister durch die Wissenschaft erhoffte; leider trügerisch; er starb, ohne diese geistige Versöhnung gesehen zu haben. Der Adel seiner Gesinnung machte Zeuthen zum ehrwürdigen Mittelpunkte der Gelehrten seines Landes. Seit 1872 mit ihm in brieflichem, manchmal auch in persönlichem, immer herzlichem Verkehr, konnte auch ich immer nur zu ihm aufblicken. Wenn er im allgemeinen in persönlichen Dingen zurückhaltend war, so hat er doch einmal einen Einblick in sein Inneres tun lassen. In der ersten Anmerkung zu der Veröffentlichung der Universitätsrede von 1907 [13] spricht Zeuthen davon, daß dieses Fest der Universität ehemals ein kirchliches war, „pour commémorer la propagation à travers les siècles de vérités qui sont aussi pour moi les plus chères.“ Und am Schlusse der Rede: „Nous (die Professoren als Lehrer) devons donc mettre notre personnalité dans notre travail; mais que cela ne nous incite pas à y chercher notre propre honneur! plaise à Dieu que nous n'y cherchions que la vérité, et que la semence déposée par nous soit bonne et saine.“

Schriftenverzeichnis.

A. Bücher, Vorlesungen, Gelegenheitsschriften.

1. Grundriß einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. (Leipzig, Teubner, 1882. 8°. VI und 97 S.)

1'. [Vorher:] Skelett af en elementar-geometrisk Kegelsnitslære. (Tidsskr. f. Math. (4) II (1878), S. 23–54, 65–76; VI (1882), S. 109–124, 132–148.)

2. Kegelsnitslæren i Oldtiden. (Forh. Vid. Selsk. 1885, (6) III 1.)

2'. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verf. besorgt von R. von Fischer-Benzon. Mit 80 Holzstichen. (Kopenhagen 1886. XIV und 511 S. 8°.)

3. Forelæsning over Mathematikens Historie: Oldtid og Middelalder. (Kjøbenhavn, A. F. Høst & Søn, 1893, 292 S.)

3'. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. (Kopenhagen, A. F. Høst & Søn, 1896.)

3''. [Französische Ausgabe, besorgt von J. Mascart, Paris 1902.]

4. Forelæsning over Mathematikens Historie: XVI. og XVII. Aarhundrede. (Kjøbenhavn, A. F. Høst & Søn, 1903. 8°.)

4'. Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verf. besorgt von Raph. Mayer. Mit 32 Figuren im Text. (Leipzig, Teubner, 1903. VIII und 434 S. 8°.) [Auch als 17. Heft der „Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften“, herausgeg. von Moritz Cantor.]

5. Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Mit 38 Figuren im Text. (Leipzig u. Berlin, Teubner, 1914. XII und 394 S. 8°. Teubners Sammlung von Lehrbüchern, Bd. 39.) [Der dänischen Ges. d. Wiss. überreicht am 16. Okt. 1914.]

6. Øvelser i grafisk Statik. [42 Aufgaben.] (Tidsskr. f. Math. (4) I (1877), S. 27–53.

7. Forelæsninger over Hydrostatik. (Tidsskr. (5) VI (1888), S. 129–152; mit Fortsetzung ibid. 1893.)
8. Forelæsninger over Bevægelses Lære ved Polyteknisk Læreanstalt. (Kjøbenhavn 1896. 18 S. 8°.)
9. Forelæsninger over trekants Koordinater. (Kjøbenhavn 1896. 64 S. 8°.)
10. Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit. Festskrift i Anledning af Universitetets Firehundredaarsfest Juni 1879. (Kjøbenhavn, Gyldendalske Boghandel, 1879.)
11. Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede. Indbydelsesskrift til Kjøbenhavns Universitetets Aarsfest i Anledning af hans Majestæt Kongens Fødselsdag den 8de April 1896. [Rektoratsrede 1896; 99 S. 4°.]
12. Steen og Oppermann. [Festrede vor dem Math. Verein, Kopenhagen 1899.] [Nyt Tidsskr. X (1899), S. 33–45.)
13. Quelques traits sur la propagation de la Science de génération en génération. Discours prononcé à la fête annuelle de l'Université de Copenhague en 1907. (Rivista di Scienza „Scientia", t. V anno III (1909), Bologna Zanichelli; 17 S.)

B. Abhandlungen.

1859.

14. Hvilkan Potents vil være den hjøgeste, hvori $\frac{d^p y}{dx^p}$ forekomar i den n^{te} Differentialligning, udladt af den primitive Ligning $f(x, y) = 0$. (Tidsskr. (1) I, S. 40–44.)

1861.

15. Deskriptiv Bestemmelse af Punkterne i alle Tangenterne til nogle Klasser blandt de geometriske Kurver. (Tidsskr. (1) III, S. 12–22.)

1862.

16. En Bemærkning. (Tidsskr. (1) IV, S. 184–185.)
17. Almindeliggjørelse og Løsning af Opgaver 51; 60. (Tidsskr. (1) IV, S. 185–187. 191–192; ferner (1) VI, S. 134–136; (2) II, S. 111, 160; (3) V, S. 183–188.) [Auch schon in (1) I, S. 44–47 und II, S. 80.]

1863.

17'. Opgaver til Løsning. (Tidsskr. (1) V, S. 63–64; ferner (2) I, S. 105–112; (2) II, S. 142–144).
18. Elementar-geometrisk Fremstilling af nogle Sætninger om Keglesnit-linierne. [Vorbereitung zum Buche [1].] (Tidsskr. (1) V, S. 69–79.)
19. Kongruente plane Figures Stilling mod hinanden i samme Plan. Anvendelse paa Opgaverne 69, 57 og 60. (Tidsskr. (1) V, S. 97–102.)
20. En geometrisk Transformationsmethode. (Tidsskr. (1) V, S. 129–130.)
21. Bemærkninger om Cassinis Ellipse. (Tidsskr. (1) V, S. 157–160.)

1864.

22. Nogle Sætninger. (Tidsskr. (1) VI, S. 78–79.)

1865.

23. Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit. (Kjøbenhavn 1865, Doktordissertation, 97 S.)
23'. Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques. (Nouv. Ann. (2) V, 1866. 80 S.) [Übersetzung von [23] mit einer Zufügung.]

1866.

24. Om rumlige Sektorer paa somme Grundflade. (Tidsskr. (2) II, S. 60—64).
25. Et Brev fra Dr. H. G. Zeuthen. (Tidsskr. (2) II, S. 97—98.)
26. Bestemmelse af Charakteristikerne i de elementære Systemer af Flader af anden Orden. (Oversigt Dan. Wetensk. Selsk. 1866, S. 71—72.)
27. Analyse d'un mémoire intitulé: „Addition à la théorie des systèmes de coniques." (C. R., t. 62, p. 177—183.)

1867.

28. Note sur les degrés de multiplicités indiquées par le principe de correspondance, suivie d'une application de ce principe à une démonstration des relations Plückériennes. (Nouv. Ann. (2) VI, S. 200—206.)

1868.

29. Sur les singularités ordinaires des courbes géométriques à double courbure. (C. R., t. 67, p. 225—229.)
30. Elementar-geometriske Beviser for Hovedsætningerne om Keglesnitternes Diametre. (Tidsskr. (1) IV, S. 145—159.)
31. Sur la détermination des caractéristiques des surfaces du second ordre. (Nouv. Ann. (2) VII, p. 385—403.)

1869.

32. Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. (Math. Ann. I, S. 432—454.)
32'. Om et nyt Rumcoordinatsystem. (Scand. Naturforsk. Forh. X_1, 1868, S. 148—164.)
33. Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface dévéloppable. (Annali di Mat. (2) III, S. 175—218.)

1870.

34. Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un. (C. R., t. 70, p. 742—745.)
35. Nouvelle démonstration de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes. (Math. Ann. III, S. 150—156.)
35'. Addition au mémoire [35]. (Math. Ann. III, S. 323—324.)
36. Note sur les quadriques polaires. (Annali di Mat. (2) IV, S. 331—337.)

1871.

37. Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface. (Math. Ann. IV, S. 1—20.)
38. Etudes géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un. (Math. Ann. IV, S. 21—49.)
39. Note sur la théorie des surfaces réciproques. (Math. Ann. IV, S. 633—637.)
40. Om Dualitetsprincipet. (Tidsskr. (3) I, S. 1—11, 129—140, 161—178.)
40'. [Fortsetzung von [40], ebenda (3) II, S. 161—181.]

1872.

41. Détermination des caractéristiques de systèmes élémentaires de cubiques. (C. R., t. 74, p. 521—524, 604—607, 726—730.)

42. Résultats d'une recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de quartiques. (C. R., t. 75, p. 703—707.)
43. Équations de quartiques dont une partie se réduit à une droite double. (C. R., t. 75, p. 950—954.) [Zu [27] gehörig.]
44. Elementært Bevis for en Sætning af den nyere Algebra. (Tidsskr. (3) II, S. 33—56.)

1873.

45. Note sur le principe de correspondance. (Bull. Sc. Math. V, p. 186—191.)
46. Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre. (C. R., t. 77, p. 270—272.)
47. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver og Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne: de elementære Systemer af fjerde Orden. Med 5 Tavler. (Danske Vid. Selsk. Skr. (5) IV, S. 287—393.) Résumé, en français, S. I—XXII.
47' [Auszug aus [47].] (Bull. Sc. Math. VII (1874), p. 97—105.)
48. Mindre Meddelelser: En Rettelse. (Tidsskr. (3) III, S. 56—57; (3) IV, S. 190—192.)
49. Et par Bemærkninger om Undervisning i analytisk Geometri ved de lærde Skoler. (Tidsskr. (3) III, S. 150—153.)

1874.

50. Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. Avec 2 planches lith. (Math. Ann. VII, S. 410—432.)
50'. Om Udseendet af Kurver af tredie og fjerde Orden. (Tidsskr. (3) III (1873), S. 97—117; IV (1874), S. 14—18.) [Auszug aus [50], wie schon [46].]
51. Om Fladen af 3die Orden. (Tidsskr. (3) IV, S. 53—62.) [Vortrag über Ch. Wieners Modell.]
52. Étude des propriétés de situation des surfaces cubiques. (Math. Ann. VIII, S. 1—30.)
53. En Udledelse af de Plückerske Formuler og af Evoluters Plückerske Tal. (Tidsskr. (3) IV, S. 129—135.)
54. En Bemærkning om Beviserne for Hovedsætninger om Elimination mellem to algebraiske Ligninger. (Tidsskr. (3) IV, S. 165—171.)
55. Détermination des nombres Plückériens des enveloppes. (C. R., t. 78, p. 274—278, 339—349.)
56. Sur les principes de correspondance du plan et de l'espace. (C. R., t. 78, p. 1553—1556.)

1875.

57. Vindskjæve Kurver med konstant forhold mellem Krumningsradius og Torsionsradius. (Tidsskr. (3) V, S. 182—183.)
58. Om 4-dobbelt rørende Kegelsnit til Kurver af fjerde Orden. (Tidsskr. (3) V, S. 182—183.)

1876.

59. Fra Mathematikens Historie. (Tidsskr. (3) VI, S. 168—174, 181—191.) [Fortsetzung s. [85] (1882) und [90] (1884).]
60. Sur une classe de points singuliers de surfaces. (Math. Ann. IX, S. 321—332.)
61. Note sur les singularités des courbes planes. (Math. Ann. X, S. 210—220.)
62. Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. (Math. Ann. X, S. 446—546.)

1877.

63. Anvendelse af en Sætning af Maxwell til at finde den billigste Bygningskonstruktion. (Tekn. Forenings Tidsskr., Kjøbenhavn I, S. 104—118.)
64. Om nipunkt Circler. (Tidsskr. for M. (4) I, S. 113—117.)
65. Om Udvidelser af Definitioner i den elementære Arithmetik og Algebra. (Tidsskr. (4) I, S. 141—151.)
66. Nogle Exempler pa leddede Stangsystemer. (Tidsskr. (4) I, S. 161—174.)

1879.

67. Om Konstruktioner af tovpolygoner [Seilpolygonen] til givne kræfter i Rummet. (Tidsskr. (4) III, S. 46—57.)
68. Svar på nogle bemærkninger af Prof. Bjørling. (Tidsskr. (4) III, S. 74—78.)
69. Déduction de différents théorèmes géométriques d'un seul principe algébrique. (Proc. London Math. Soc. X, p. 196—204; XI, p. 156—157.)
70. Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant à des conditions de contact double. (C. R., t. 89, p. 899—902, 946—948.)
71. Nogle hypotheser om Archimedes kvadratrods Beregning. (Tidsskr. (4) III, S. 145—155.)
72. Nogle Egenskaber ved Kurver af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter. Avec un résumé en français. (Overs. Dan. Vidensk. Selsk. Forh., S. 89—122; Résumé, S. 15—19.)

1880.

73. Om antalgeometriens anvendelse til Utledelse af sædvanlige geometriske Sætninger. (Skand. Nat. möt. Förh. 1880, Stockholm 1883, S. 155—163.)
74. Nogle tilsyneladende Paradoxer i Læren om Centralbevægelser. (Tidsskr. (4) IV, S. 3—9.)
75. Et bevis for at ligningen $f(x, y, y') = 0$ har et fuldständigt Integral. (Tidsskr. (4) IV, S. 161—167.)
76. Konstruktion af det ottende Skæringspunkt mellem de Flader af anden Orden som gaa gjennem syv givne Punkter, mit Résumé u. Tafel. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., 227—236 u. 2 S. Résumé.) [Anschließend an [79].]
77. Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques. (C. R., t. 90, p. 1114—1118.)
78. Grafisk Behandling af en Bjælkes bevægelig Belastning. (Tekn. Foren. Tidsskr. 1880.)

1881.

79. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. (Math. Ann. XVIII, S. 33—68.)
80. Bestemmelse af største fælles Faktor til Polynomier ved Determinanter. (Tidsskr. (4) V, S. 45—55.)

1882.

81. Om stationäre Kurver i et System. (Tidsskr. (4) VI, S. 5—13.)
82. Bevis for en Konstruktion af Chasles. (Tidsskr. (4) VI, S. 13—16.)
83. Elementær Behandling af et par Sætninger om et Punkts Bevægelse. (Tidsskr. (4) VI, S. 46—50.)
84. Nogle rationale Relationer mellem Længder. (Tidsskr. (4) VI.)
85. Fra Mathematikens Historie II, III. (Tidsskr. (4) VI, S. 47—101.)
86. Om mecanisk konstruktion af Descartes Ovaler ved Hjälp af Snore. (Tidsskr. (4) VI, S. 145—154.)

1883.

87. Et elementært Bevis for Pascals Sætning. (Tidsskr. (5) I, S. 78—81.)
88. Om Sammensætning af en Punkts Hastigheder. (Tidsskr. (5) I, S. 156—162.)
89. Sur un groupe de théorèmes et de formules de la géométrie énumérative. (Acta Math. I, S. 171—188.)

1884.

90. Fra Mathematikens Historie. IV. Prøver paa Diofants Løsning af arithmetiske Opgaver. (Tidsskr. (5) I, S. 145—156.)
91. Anden Konstruktion af Dobbeltpunkterne i Projektionen af en to Keglesnitsfladers Skjæringskurve. (Tidsskr. (5) II, S. 60—63.)
92. Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique. (Extr. d'une lettre à M. C. le Paige.) (Acta Math. V, S. 203—204.)

1885.

93. Et Udledelse af Duhamel's Konvergentsbetingelse. (Tidsskr. (5) III, S. 147—149.)
94. Adolph Steen. (Tidsskr. (5) IV, S. 65—70.)
95. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. (Second article.) (Math. Ann. XXVI, S. 247—274.) [Fortsetzung von [79].]

1886.

96. Construction du 8^e point commun aux surfaces du second ordre qui passent par 7 points donnés. (J. f. Math. 99, S. 320—323.)
97. Su le superficie di 4° ordine con conica doppia. (Annali di Mat. (2) XIV, S. 31—70.)
98. Et Udledelse af Betingelsen for at en Flade af anden Orden er udfoldelig. (Tidsskr. (5) IV, S. 128—130.)
99. Om Momentsætninger i Statiken. (Tidsskr. (5) IV, S. 145—154.)
100. Om den mathematiske Behandling af Gnidningsmodstanden. (Tidsskr. (5) IV, S. 168—174.)
101. Nogle Bestemmelser af Pyramidens Volumen. (Tidsskr. (5) IV, S. 175—179.)

1887.

102. Note sur un problème de Steiner. (Extr. d'une lettre à M. P. H. Schoute.) (Bull. Sc. Math. (2) XI, S. 82—86.)
103. Om algebraiske Kurvers Bestemmelse ved Punkter. (Tidsskr. (5) V, S. 65—79.)
103'. Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés. (Math. Ann. XXXI (1888), S. 236—251.) [Übersetzung und kleine Erweiterung von [103].]

1888.

104. Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 127—144.)

1889.

105. Note sur les 8 points d'intersection de trois surfaces du second ordre. (Acta Math. XII, S. 362—366.)
106. Extrait d'une lettre adressée à M. Guccia. (Palermo Rendic. III, S. 171—178.) [Auf Geschlecht p zerfallender Kurven bezüglich.]

1890.

107. Om Omdannelse af Differentialligninger med to Variable ved Indførelse af Liniekoordinater. (Nyt Tidsskr. I, S. 1—10.)
108. Bevis for at en algebraisk Ligning altid har en Rod. (Nyt Tidsskr. I, S. 65—67.)

109. Analytisk Løsning og almindeliggjørelse af den Opgave: paa en Kugleflade at finde en Kurve med konstant Krumning. (Nyt Tidsskr. I, S. 67–76.)
110. Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. Study. (Extrait d'une lettre à M. Klein.) (Math. Ann. XXXVII, S. 461–464.)

1892.

111. Om Konstruktionen som Existensbevis i den græske Mathematik. (Nyt Tidsskr. III A, S. 105–113.)
112. Nouvelle démonstration du princip de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. (Math. Ann. XL, S. 99–124.)

1893.

113. Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée. (Math. Ann. XLI, S. 539–544.)
114. Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3[e] degré par Archimède. (Bibliotheca math. Neue Folge VII, S. 97–104.)
115. Notes sur l'histoire des mathématiques: I. Sur la résolution numérique d'une équation du 3[e] degré par Léonard de Pise. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 6–17.) [Vorher, S. 1–5: Einleitung in die „Notes".]
116. Notes sur l'histoire des mathématiques: II. Tartalea contra Cardanum: réplique relative à la question de priorité sur la résolution des équations cubiques. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 303–330.)
117. Notes sur l'histoire des mathématiques: III. Sur la signification traditionnelle du mot „géométrique". (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 330–341.)
118. Nogle Bemærkninger over Bestemmelser af Asymptoterne til Kurver bestemte af en Differentialligning af 1[ste] Orden. (Nyt Tidsskr. IV B, S. 33–77.)

1894.

119. M. Maurice Cantor et la géométrie supérieure de l'antiquité. (Bull. Sc. Math. (2) XVIII, S. 163–169.)

1895.

120. Notes sur l'histoire des mathématiques: IV. Sur les quadratures avant le calcul intégral, et en particulier sur celles de Fermat. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 37–80.)
121. Notes sur l'histoire des mathématiques: V. Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 193–256.)
122. Notes sur l'histoire des mathématiques: VI. Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 257–278.)
123. Réponse aux remarques de M. Cantor. (Bull. Sc. Math. (2) XIX, S. 183–184.)

1896.

124. Die geometrische Construction als „Existenzbeweis" in der antiken Geometrie. (Math. Ann. XLVII, S. 222–228.)

1897.

125. Notes sur l'histoire des mathématiques: Suite. VII. Barrow, le maître de Newton. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 565–606.)
126. Bemærkninger om, og nyt Bevis for Fundamentalsætninger i den projective Geometri. (Nyt Tidsskr. VIII B, S. 73–85.)
127. Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective. (C R., t. 125, p. 638–640, 858–859.)

1898.

128. Sur le fondement de la géométrie projective. (C. R., t. 126, p. 213—215.)
129. Isaac Barrow et la méthode inverse des Tangentes. (Verh. des I. intern. Math.-Congr. Zürich, S. 274—280.)

1900.

130. Om en Art antalgeometriske Beviser. (Nyt Tidsskr. X B, S. 49—51.)
131. Kleine Bemerkungen zur 2^{ten} Auflage von M. Cantor's „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". (Biblioth. math. (3) I [unter den Bemerkungen von anderen Seiten].)
132. Note sur la trigonométrie de l'antiquité. (Biblioth. math. (3) I, S. 20—27.)
133. Historisk og geometrisk Studie af Descartes' Tangenterkonstruktion. (Nyt Tidsskr. X B, S. 51—53.)

1901.

134. Auszug aus einem Schreiben Z.'s an E. Wölffing. (Math.-naturwiss. Mitteil. Württemberg (2) III, S. 55—56.)
135. Preisfrage der Dan. Vid. Selsk. (Dan. Vid. Selsk., Questions mises au concours pour 1901.)

1903.

136. Ved Forelæggelsen af Mathematikens Historie: 16^{ste} og 17^{ste} Aarhundrede. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 553—572.)

1904.

137. Sur l'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens. (Bibl. math. (3) V, S. 97—112.)
138. Théorème de Pythagore. Origine de la géométrie scientifique. (C. R. du II. Congrès internat. de Philosophie Genève. S. 833—854.)

1905.

139. L'œuvre de Paul Tannery comme historien des mathématiques. (Mit Porträt als Titelbild.) (Biblioth. math. (3) VI, S. 257—304.) [Mit Einleitung und Schriftenverzeichnis von G. Eneström.]
140. Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik. (Verh. des III. internat. Math.-Kongr. Heidelberg, S. 536—542.)

1906.

141. Abzählende Methoden: III C 3. (Encyklopädie der math. Wiss. Bd. III, S. 257—312.)
142. Le principe de correspondance pour une surface algébrique. (C. R., t. 143, p. 491—495, 535—539.)
143. J. L. Heiberg u. H. G. Zeuthen: Eine neue Schrift von Archimedes. (Bibl. math. (3) VII, S. 321—363 [1907 auch als Sonderabzug erschienen].) [Übersetzung von Heiberg, math. Kommentar von Zeuthen.]

1907.

144. J. L. Heiberg u. H. G. Zeuthen: Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik. (Bibl. math. (3) VIII, S. 118—134.) [13 planimetrische Aufgaben.]

1909.

145. Exemple d'une correspondance sans Wertigkeit. Atti del IV Congresso internat. dei Matematici Rom, Bd. II, S. 227—230.)
146. Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la géométrie. (Atti del IV Congresso internat. dei Matematici Rom, Bd. III, S. 422—427.)

147. Über einige archimedische Postulate. (Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften u. der Technik, Leipzig bei F. C. W. Vogel, I. S. 320—327.)
148. Introduction à un traité didactique des méthodes énumératives de la géométrie. (C. R. du Congrès des Mathématiciens à Stockholm. S. 32—42.] [Auf das geplante Werk [5] bezüglich.]

1910.

149. Notes sur l'histoire des mathématiques: VIII. Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh. S. 395—435.)

1912.

150. Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. (Kultur der Gegenwart; Teubner, Leipzig u. Berlin. III. Teil, I. Abt.: Die mathematischen Wissenschaften. VIII u. 95 S.)
151. Præcisionsmathematikens Tilbliven fra Pythagoras til Euklid. (Bericht des 2. skand. Kongresses, Kopenhagen 1912.)
152. Om og i Anledning af Indernes Bortskaffen af dobbelt Irrationalitet. (Nyt Tidsskr. XXII A, S. 77—81.)

1913.

153. Notes sur l'histoire des mathématiques: IX. Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la Réforme Platonicienne. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 431—473.)
154. Geometriske Synsmaader før Platon. (Nyt Tidsskr. 24 A, S. 105—124.)

1914.

155. Om Anvendelse af regning og af raisonnement i Mathematiken. Ved Forelæggelsen: Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Leipzig 1914. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 271—286.)

1915.

156. Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationelles. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 333—362.)
157. Géométrie énumérative. III, 4. D'après l'article allemand par M. Pieri (Parme). Encyclopédie des Sc. math., t. III, v. I., p. 260—331.)

1917.

158. Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev rational Videnskab. Avec un résumé en français. (Forh. Dan. Vid. Selsk. (8) I, S. 199—369. Résumé S. 370—379.)

1918.

159. Sur les définitions d'Euclide. (Scientia, vol. 24, anno 12, p. 255—269.)

1919.

160. Sur l'origine de l'Algèbre. (Dan. Vid. Selsk., Math.-fys. Meddelser II, 4. 70 S.)
161. Erklärung eines „Paradox" in der abzählenden Geometrie. (Archiv d. Math. u. Phys. (3) XXVIII, S. 52—55.)

(Eingegangen am 11. 11. 1920.)

Idealtheorie in Ringbereichen.

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Den Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet die *Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen.* Zum Verständnis dieser Übertragung seien vorerst für die ganzen rationalen Zahlen die Zerlegungssätze etwas abweichend von der üblichen Formulierung angegeben.

Faßt man in

$$a = p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \ldots p_\sigma^{\varrho_\sigma} = q_1 q_2 \ldots q_\sigma$$

die Primzahlpotenzen q_i als Komponenten der Zerlegung auf, so kommen diesen Komponenten die folgenden charakteristischen Eigenschaften zu:

1. Sie sind *paarweise teilerfremd*; aber kein q ist als Produkt paarweise teilerfremder Zahlen darstellbar, also besteht in diesem Sinne Irreduzibilität. Aus der paarweisen Teilerfremdheit folgt noch, daß das Produkt $q_1 \ldots q_\sigma$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen $[q_1 \ldots q_\sigma]$ wird.

2. Je zwei der Komponenten, q_i und q_k, sind *relativprim*; d. h. ist $b \cdot q_i$ durch q_k teilbar, so ist b durch q_k teilbar. Auch in diesem Sinne besteht Irreduzibilität.

3. Jedes q ist *primär*; d. h. ist ein Produkt $b \cdot c$ durch q teilbar, aber b nicht teilbar, so ist eine Potenz[1]) von c teilbar. Die Darstellung ist ferner eine solche durch *größte primäre Komponenten*, da das Produkt zweier verschiedener q nicht mehr primär ist. Auch in bezug auf die Zerlegung in größte primäre Komponenten sind die q irreduzibel.

4. Jedes q ist *irreduzibel* in dem Sinne, daß es sich nicht als kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei echten Teilern darstellen läßt.

Der Zusammenhang dieser primären Zahlen q mit den Primzahlen p besteht darin, daß es zu jedem q ein und (vom Vorzeichen abgesehen) nur ein p gibt, das Teiler von q ist und von dem eine Potenz durch q teilbar ist: die zugehörige Primzahl. Ist p^ϱ die niedrigste derartige Potenz — ϱ der Exponent von q —, so wird hier insbesondere p^ϱ gleich q. Der *Eindeutigkeitssatz* läßt sich nun so aussprechen:

Bei zwei verschiedenen Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in die irreduziblen, größten primären Komponenten q stimmen die Anzahl der Komponenten, die zugehörigen Primzahlen (bis auf das Vorzeichen) und die Exponenten überein. Wegen $p^\varrho = q$ folgt hieraus auch das Übereinstimmen der q selbst (bis auf das Vorzeichen).

---

[1]) Ist diese Potenz stets die erste, so handelt es sich bekanntlich um Primzahlen.

Die durch das Vorzeichen gegebene Unbestimmtheit wird bekanntlich aufgehoben, wenn man statt der Zahlen die aus ihnen abgeleiteten Ideale (alle durch a teilbaren Zahlen) betrachtet; dann gilt die Formulierung genau so für die eindeutige Zerlegung der Ideale der (endlichen) algebraischen Zahlkörper in Primidealpotenzen.

Im folgenden wird nun (§ 1) ein allgemeiner Ringbereich zugrunde gelegt, der nur der *Endlichkeitsbedingung* genügen muß, daß jedes Ideal des Bereichs eine endliche Idealbasis besitzt. Ohne eine solche Endlichkeitsbedingung brauchten nämlich keine irreduziblen und Prim-Ideale zu existieren, wie der Bereich *aller* ganzen algebraischen Zahlen zeigt, in dem es keine Zerlegung in Primideale gibt.

Es zeigt sich, daß — entsprechend den vier charakteristischen Eigenschaften der Komponenten q — im allgemeinen *vier getrennte Zerlegungen existieren, die jeweils durch Unterspaltung auseinander hervorgehen.* Dabei handelt es sich bei der Zerlegung in teilerfremd-irreduzible Ideale um eine Produktdarstellung, bei den übrigen drei Zerlegungen um eine reduzierte (§ 2) Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches. Auch der Zusammenhang zwischen primärem Ideal — auch die irreduziblen Ideale sind primär — und zugehörigem Primideal bleibt erhalten: Zu jedem primären Ideal $\mathfrak{Q}$ ist eindeutig ein zugehöriges Primideal $\mathfrak{P}$ bestimmt, das Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist, und von dem eine Potenz durch $\mathfrak{Q}$ teilbar wird. Ist $\mathfrak{P}^\varrho$ die niedrigste derartige Potenz — ϱ der Exponent von $\mathfrak{Q}$ —, so braucht aber hier $\mathfrak{P}^\varrho$ nicht mit $\mathfrak{Q}$ übereinzustimmen. Der *Eindeutigkeitssatz* spricht sich nun so aus:

Die Zerlegungen 1 *und* 2 *sind eindeutig*; *bei zwei verschiedenen Zerlegungen* 3 *oder* 4 *stimmen die Anzahl der Komponenten und die zugehörigen Primideale überein*[*]); *die unter den Komponenten auftretenden isolierten Ideale* (§ 7) *sind eindeutig bestimmt.*

Zum Beweise der Zerlegungssätze wird aus der Endlichkeitsbedingung der zuerst von Dedekind für endliche Zahlenmoduln ausgesprochene „Satz von der endlichen Kette" gefolgert und daraus die Darstellung 4 eines jeden Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen Idealen abgeleitet. Durch Umformung des Begriffs der Reduzibilität einer Komponente ergibt sich daraus der grundlegende *Eindeutigkeitssatz für die Zerlegung* 4 *in irreduzible Ideale.* Durch Zusammenfassen von je endlich vielen Komponenten wird zu den übrigen Zerlegungen aufgestiegen, deren Eindeutigkeitssätze sich als Folge von Eindeutigkeitssatz 4 ergeben.

---

[*]) Vermutlich gilt darüber hinaus auch das Übereinstimmen der Exponenten, und noch allgemeiner die Isomorphie entsprechender Komponenten.

Schließlich wird gezeigt (§ 9), daß die Darstellung durch endlich viele *irreduzible* Komponenten auch unter geringeren Voraussetzungen statthat; die Kommutativität des Ringbereiches ist nicht erforderlich, und es genügt, an Stelle eines Ideals einen Modul in bezug auf den Bereich zu betrachten. In diesem allgemeineren Fall gilt noch die *Anzahlgleichheit der Komponenten* bei zwei verschiedenen Zerlegungen, während die Begriffe prim und primär an Kommutativität und Idealbegriff gebunden sind; dagegen bleibt der Begriff teilerfremd bei Idealen in nichtkommutativen Bereichen erhalten.

Der einfachste Ringbereich, für den tatsächlich die vier getrennten Zerlegungen auftreten, ist der Bereich aller Polynome von n Variablen mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Die einzelnen Zerlegungen lassen sich hier irrational durch das Verhalten der algebraischen Gebilde deuten, und der Eindeutigkeitssatz für die zugehörigen Primideale entspricht dem Fundamentalsatz der Eliminationstheorie von der eindeutigen Zerlegbarkeit der algebraischen Gebilde in irreduzible. Weitere Beispiele sind gegeben durch alle endlichen Integritätsbereiche aus Polynomen (§ 10). Aber auch der einfache Bereich aller geraden Zahlen, allgemeiner aller durch eine feste Zahl teilbaren Zahlen, bietet schon ein Beispiel von teilweise getrennten Zerlegungen (§ 11). Ein Beispiel der Idealtheorie in nichtkommutativen Bereichen liefert die Elementarteilertheorie (§ 12), wo eindeutige Zerlegung in irreduzible Ideale, bzw. Klassen besteht. Diese irreduziblen Klassen charakterisieren vollständig die irreduziblen Bestandteile der Elementarteiler, können vielleicht für Bereiche, wo die gewöhnliche Elementarteilertheorie versagt, als deren Äquivalent angesehen werden.

Über die vorhandene Literatur ist das Folgende zu bemerken: Die Zerlegung in *größte primäre Ideale* ist für den Polynombereich mit beliebigen komplexen bzw. ganzzahligen Koeffizienten von Lasker gegeben, von Macaulay in einzelnen Punkten weitergeführt[*]). Beide stützen sich auf die Eliminationstheorie, benutzen also die Tatsache, daß ein Polynom sich eindeutig als Produkt von irreduziblen Polynomen darstellen läßt. Tatsächlich sind die Zerlegungssätze für Ideale von dieser Voraussetzung unabhängig, wie die Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern vermuten läßt und wie die vorliegende Arbeit zeigt. Auch das primäre Ideal ist bei Lasker und Macaulay unter Zugrundelegung von Begriffen aus der Eliminationstheorie definiert.

Die Zerlegung in *irreduzible* Ideale und die in *relativprim-irreduzible*

---

[*]) E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale. Math. Ann. 60 (1905), S. 20, Satz VII und XIII. — F. S. Macaulay, On the Resolution of a given Modular System into Primary Systems including some Properties of Hilbert Numbers. Math. Ann. 74 (1913), S. 66.

scheint in der Literatur auch für den Polynombereich nicht bemerkt; nur bei Macaulay findet sich eine Bemerkung über die Eindeutigkeit der isolierten primären Ideale.

Die Zerlegung in *teilerfremd-irreduzible* Ideale ist für den Polynombereich von Schmeidler[4]) gegeben, unter Benutzung der Eliminationstheorie für den Endlichkeitsnachweis. Doch ist hier der Eindeutigkeitssatz nur für Klassen von Idealen, nicht für die Ideale selbst ausgesprochen. Dieser letztere Eindeutigkeitssatz findet sich in einer gemeinsamen Arbeit[5]), wo es sich um Ideale in nichtkommutativen Polynombereichen handelt. Hier wird nur von der endlichen Idealbasis Gebrauch gemacht, Sätze und Methoden bleiben also für allgemeine Ringbereiche bestehen, lassen sich durch die vorliegende Arbeit in bezug auf die Anzahlgleichheit verschärfen (§ 11). Die vorliegenden Untersuchungen stellen eine starke Verallgemeinerung und Weiterentwicklung der diesen beiden Arbeiten zugrunde liegenden Begriffsbildungen dar. Das Wesentliche der beiden Arbeiten ist der Übergang von der Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches zu einer additiven Zerlegung des Systems der Restklassen. Hier wird der einfacheren Darstellung halber wieder beim kleinsten gemeinsamen Vielfachen geblieben; der additiven Zerlegung entspricht dann die Umformung des Begriffs der Reduzibilität in eine Eigenschaft des Komplements (§ 3). Doch lassen sich nach Überlegungen, die wesentlich denen der gemeinsamen Arbeit entsprechen, alle angegebenen Sätze auch als additive Zerlegungssätze für das System der Restklassen und gewisser Teilsysteme auffassen. Dieses System der Restklassen bildet einen Ring von gleicher Allgemeinheit wie der ursprünglich zugrunde gelegte; es kann nämlich jeder Ring aufgefaßt werden als System der Restklassen desjenigen Ideals, das der Gesamtheit der identischen Relationen zwischen den Ringelementen entspricht; oder auch einem Teilsystem dieser Relationen, indem man die übrigen Relationen auch im Bereich als erfüllt annimmt.

Diese Bemerkung gibt auch die Einordnung der Arbeiten von Fraenkel[6]). Fraenkel betrachtet additive Zerlegungen von Ringen, die solchen einschränkenden Bedingungen unterworfen werden (Existenz regulärer Elemente, Division durch diese, Zerlegbarkeitsbedingung), daß für das ent-

---

[4]) W. Schmeidler, Über Moduln und Gruppen hyperkomplexer Größen. Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 29.

[5]) E. Noether - W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken. Math. Zeitschr. **8** (1920), S. 1.

[6]) A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen. J. f. M. **145** (1914), S. 139. Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen. Habilitationsschrift, Leipzig, Teubner, 1916. Über einfache Erweiterungen zerlegbarer Ringe. J. f. M. **151** (1920), S. 121.

sprechende Ideal die vier Zerlegungen zusammenfallen. Wegen dieses Zusammenfallens bedeutet auch seine Endlichkeitsbedingung, daß das Ideal nur endlich viele echte Teiler besitzen soll — von der übrigens teilweise abgesehen wird —, keine stärkere Einschränkung als unsere. Der Ausgangspunkt Fraenkels ist durch die andersartigen, im wesentlichen algebraischen Ziele seiner Arbeiten bedingt; durch algebraische Erweiterung gelangt er dann zu allgemeineren Ringen mit weniger einschränkenden Bedingungen.

§ 1.

Ringbereich, Ideal, Endlichkeitsbedingung.

1. Der zugrunde gelegte Bereich Σ sei ein (kommutativer) *Ring* in abstrakter Definition[7]); d. h. Σ bestehe aus einem System von Elementen $a, b, c, \ldots, f, g, h, \ldots$, in dem eine den üblichen Bedingungen genügende Relation als *Gleichheit* definiert ist; und in dem durch zwei Operationen (Verknüpfungsarten), *Addition* und *Multiplikation*, aus je zwei Ringelementen a und b stets eindeutig je ein drittes als Summe $a+b$ und als Produkt $a \cdot b$ gewonnen wird. Der Ring und die sonst ganz willkürlichen Operationen müssen dabei den folgenden Gesetzen genügen:

1. *Dem assoziativen Gesetz der Addition*: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
2. *Dem kommutativen Gesetz der Addition*: $a+b=b+a$.
3. *Dem assoziativen Gesetz der Multiplikation*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
4. *Dem kommutativen Gesetz der Multiplikation*: $a \cdot b = b \cdot a$.
5. *Dem distributiven Gesetz*: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.
6. *Dem Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion.*

Es gibt in Σ ein einziges Element x, das die Gleichung $a+x=b$ befriedigt. (Man bezeichnet $x=b-a$.)

Aus diesen Eigenschaften folgt die Existenz der Null; ein Ring braucht aber keine Einheit zu besitzen; und es kann das Produkt zweier Elemente verschwinden, ohne daß ein Faktor verschwindet. Ringe, für die aus dem Verschwinden eines Produktes stets das Verschwinden eines Faktors folgt, und die außerdem eine Einheit besitzen, werden als *eigentliche Integritätsbereiche* bezeichnet. Für die endliche Summe $a+a \ldots + a$ führen wir die übliche abkürzende Bezeichnung na ein, wobei die ganzen Zahlen n lediglich als abkürzende Zeichen, nicht als Ringelemente zu betrachten sind, und durch $a = 1 \cdot a$, $na + a = (n+1)a$ rekurrierend definiert sind.

[7]) Die Definition ist der Fraenkelschen Habilitationsschrift entnommen, unter Weglassung dessen einschränkender Bedingungen 6, I und II; dafür mußte das kommutative Gesetz der Addition mit aufgenommen werden. Es handelt sich also um die den Körper definierenden Gesetze unter Weglassung der Umkehrbarkeit der Multiplikation.

2. Unter einem *Ideal* $\mathfrak{M}$[8]) in Σ werde ein System von Elementen aus Σ verstanden, das den beiden Bedingungen genügt:

1. *$\mathfrak{M}$ enthält neben f auch $a \cdot f$, wo a ein beliebiges Element aus Σ ist.*

2. *$\mathfrak{M}$ enthält neben f und g auch die Differenz $f-g$*; also neben f auch nf für jede ganze Zahl n.

Ist f Element von $\mathfrak{M}$, so drücken wir das wie üblich durch $f \equiv 0(\mathfrak{M})$ aus; und sagen, *f ist durch $\mathfrak{M}$ teilbar.* Ist jedes Element von $\mathfrak{N}$ zugleich Element von $\mathfrak{M}$, also teilbar durch $\mathfrak{M}$, so sagen wir: *$\mathfrak{N}$ ist durch $\mathfrak{M}$ teilbar*; in Zeichen: $\mathfrak{N} \equiv 0(\mathfrak{M})$. $\mathfrak{M}$ heißt *echter Teiler* von $\mathfrak{N}$, wenn es von $\mathfrak{N}$ verschiedene Elemente enthält, also nicht umgekehrt durch $\mathfrak{N}$ teilbar ist. Aus $\mathfrak{N} \equiv 0(\mathfrak{M})$; $\mathfrak{M} \equiv 0(\mathfrak{N})$ folgt $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Auch die übrigen bekannten Begriffe bleiben wörtlich erhalten. Unter dem *größten gemeinsamen Teiler* zweier Ideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ — $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — verstehen wir die Gesamtheit der Elemente, die sich in der Form $a+b$ darstellen lassen, wo a alle Elemente aus $\mathfrak{A}$, b alle aus $\mathfrak{B}$ durchläuft; $\mathfrak{D}$ wird wieder ein Ideal. Ebenso ist der größte gemeinsame Teiler von unendlich vielen Idealen — $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\nu, \ldots)$ — definiert als Gesamtheit der Elemente d, die sich darstellen lassen als Summe der Elemente von jeweils endlich vielen Idealen: $d = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_n}$; auch hier wird $\mathfrak{D}$ wieder ein Ideal.

Enthält das Ideal $\mathfrak{M}$ insbesondere eine endliche Anzahl von Elementen $f_1, f_2, \ldots, f_\varrho$ derart, daß

$$\mathfrak{M} = (f_1 \ldots f_\varrho); \quad \text{d. h.} \quad f = a_1 f_1 + \ldots + a_\varrho f_\varrho + n_1 f_1 + \ldots + n_\varrho f_\varrho$$

wird für jedes $f \equiv 0(\mathfrak{M})$, wobei die a_i Größen des *Ringbereiches*, die n_i ganze Zahlen sind, so wird $\mathfrak{M}$ als *endliches Ideal* bezeichnet; $f_1, \ldots, f_\varrho$ als eine *Idealbasis*.

Wir legen nun im folgenden nur *solche Ringe Σ zugrunde, die die Endlichkeitsbedingung erfüllen: Jedes Ideal in Σ ist ein endliches, besitzt also eine Idealbasis.*

3. Aus der Endlichkeitsbedingung folgt direkt der allen folgenden Überlegungen zugrunde liegende

Satz I (*Satz von der endlichen Kette*)[9]): *Ist* $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\nu, \ldots$

---

[8]) Ideale werden mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet. $\mathfrak{M}$ soll an das Beispiel des gewöhnlich als „Modul" oder Formenmodul bezeichneten Ideals aus Polynomen erinnern. Übrigens benutzen die §§ 1–3 nur die Modul- und nicht die Idealeigenschaft; vgl. dazu § 9.

[9]) Zuerst ausgesprochen für Zahlenmoduln von Dedekind: Zahlentheorie, Suppl. XI, § 172, Satz VIII (4. Auflage); unser Beweis und die Bezeichnung „Kette" ist von dort übernommen. Für Ideale aus Polynomen bei Lasker, a. a. O. S. 56 (Hilfssatz). Der Satz findet aber in beiden Fällen nur vereinzelte Anwendung. Unsere Anwendungen beruhen durchweg auf dem *Auswahlpostulat*.

ein abzählbar unendliches System von Idealen in Σ, von denen jedes durch das folgende teilbar ist, so sind von einem endlichen Index n an alle Ideale identisch, $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n+1} = \ldots$. M. a. W.: *Bildet* $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\nu, \ldots$ *eine einfach geordnete Kette von Idealen derart, daß jedes Ideal ein echter Teiler des unmittelbar vorangehenden ist, so bricht die Kette im Endlichen ab.*

Es sei nämlich $\mathfrak{D} = (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\nu, \ldots)$ der größte gemeinsame Teiler des Systems und $f_1 \ldots f_k$ eine infolge der Endlichkeitsbedingung stets existierende Basis von $\mathfrak{D}$. Dann folgt aus der Teilbarkeitsvoraussetzung, daß jedes Element von $\mathfrak{D}$ zugleich Element eines Ideals der Kette ist; denn aus

$$f = g + h, \quad g \equiv 0(\mathfrak{M}_r), \quad h \equiv 0(\mathfrak{M}_s), \quad (r \leqq s)$$

folgt $g \equiv 0(\mathfrak{M}_s)$ und also $f \equiv 0(\mathfrak{M}_s)$. Entsprechendes gilt, wenn f Summe von mehreren Bestandteilen ist. Es gibt also auch einen endlichen Index n, derart, daß

$$f_1 \equiv 0(\mathfrak{M}_n); \ \ldots; \ f_k \equiv 0(\mathfrak{M}_n); \ \mathfrak{D} = (f_1 \ldots f_k) \equiv 0(\mathfrak{M}_n).$$

Da umgekehrt $\mathfrak{M}_n \equiv 0(\mathfrak{D})$, so wird $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{D}$; und da weiter

$$\mathfrak{M}_{n+i} \equiv 0(\mathfrak{D}); \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{M}_n \equiv 0(\mathfrak{M}_{n+i}),$$

so wird auch $\mathfrak{M}_{n+i} = \mathfrak{D} = \mathfrak{M}_n$ für jedes i, womit der Satz bewiesen ist.

Es sei bemerkt, daß aus diesem Satz umgekehrt wieder die Existenz der Idealbasis folgt, so daß die *Endlichkeitsbedingung auch in dieser basisfreien Form* hätte ausgesprochen werden können.

§ 2.

Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen Idealen.

Das *kleinste gemeinsame Vielfache* $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k]$ der Ideale $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k$ sei wie üblich definiert als Gesamtheit der Elemente, die sowohl durch $\mathfrak{B}_1$, wie durch $\mathfrak{B}_2, \ldots$ wie durch $\mathfrak{B}_k$ teilbar sind; in Zeichen:

$$\text{aus} \quad f \equiv 0(\mathfrak{B}_i), \ (i = 1, 2, \ldots, k), \quad \text{folgt:} \ f \equiv 0([\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k])$$

und umgekehrt. Das kleinste gemeinsame Vielfache wird wieder ein Ideal; die Ideale $\mathfrak{B}_i$ bezeichnen wir auch als *Komponenten der Zerlegung.*

Definition I. *Eine Darstellung* $\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_k]$ *heißt reduzierte Darstellung, wenn kein* $\mathfrak{B}_i$ *im kleinsten gemeinsamen Vielfachen* $\mathfrak{A}_i$ *der übrigen Ideale aufgeht, und wenn kein* $\mathfrak{B}_i$ *sich durch einen echten Teiler ersetzen läßt*[10]. *Sind die Bedingungen nur für das Ideal* $\mathfrak{B}_i$ *erfüllt, so*

---

[10]) Ein Beispiel einer nicht reduzierten Darstellung ist:

$$(x^2, xy) = [(x), (x^2, xy, y^2)]$$

heißt die Darstellung reduziert in bezug auf $\mathfrak{B}_i$. *Das kleinste gemeinsame Vielfache* $\mathfrak{A}_i = [\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{i-1}, \mathfrak{B}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{B}_k]$ *wird als Komplement von* $\mathfrak{B}_i$ *bezeichnet. Darstellungen, bei denen nur die erste Bedingung erfüllt ist, heißen kürzeste Darstellungen.*

Es genügt nun, sich bei der Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches auf reduzierte Darstellungen zu beschränken, nach

Hilfssatz I. *Jede Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen Idealen läßt sich auf mindestens eine Art durch eine reduzierte Darstellung ersetzen; eine solche Darstellung läßt sich insbesondere erreichen durch sukzessive Zerlegung.*

Sei nämlich $\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1^* \ldots \mathfrak{B}_l^*]$ eine beliebige Darstellung von $\mathfrak{M}$, so lassen wir der Reihe nach diejenigen $\mathfrak{B}_i^*$ fort, die im kleinsten gemeinsamen Vielfachen der stehen gelassenen aufgehen. Da die übrigen Ideale noch $\mathfrak{M}$ ergeben, ist in der so entstehenden Darstellung:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_k] = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i]$$

dann die erste Bedingung erfüllt, sie ist also eine kürzeste Darstellung; und diese Bedingung bleibt erfüllt, wenn man irgendein $\mathfrak{B}_i$ durch einen echten Teiler ersetzt. Die zweite Bedingung aber ist nach dem Satz von der endlichen Kette (Satz I) stets erfüllbar. Denn sei gesetzt:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i] = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i^{(1)}] = \ldots = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i^{(\nu)}], \ldots,$$

wo jedes $\mathfrak{B}_i^{(\nu)}$ ein echter Teiler des unmittelbar vorangehenden ist, so muß nach diesem Satz die Kette $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}_i^{(\nu)}, \ldots$ im Endlichen abbrechen; in der Darstellung: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i^{(n)}]$ läßt sich also $\mathfrak{B}_i^{(n)}$ durch seinen echten Teiler ersetzen; und dies gilt a fortiori, wenn man $\mathfrak{A}_i$ durch einen echten Teiler ersetzt. Wendet man also das Verfahren der Reihe nach auf jedes $\mathfrak{B}_i$ an, indem man jeweils das Komplement mit den schon reduzierten $\mathfrak{B}$ bildet, so entsteht eine reduzierte Darstellung[11]).

Um eine solche Darstellung sukzessiv zu gewinnen, ist zu zeigen, daß aus den einzelnen reduzierten Darstellungen:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1], \ \mathfrak{C}_1 = [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2]; \ \ldots, \ \mathfrak{C}_{l-1} = [\mathfrak{B}_l, \mathfrak{C}_l]$$

folgt, daß auch die daraus entstehende Darstellung: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_l \mathfrak{C}_l]$

---

für jeden Exponenten $\lambda \geq 2$; die $\lambda = 1$ entsprechende Darstellung $[(x), (x^2, y)]$ ist eine zugehörige reduzierte. (Diese Darstellung gab mir der im Krieg gefallene K. Hentzelt als einfachstes Beispiel einer nicht eindeutigen Zerlegung in primäre Ideale an.)

[11]) Daß eine solche durch die gegebene Darstellung nicht eindeutig definiert ist, zeigt das vorige Beispiel. Für $(x^2, xy) = [(x), (x^2, xy, y^\lambda)]$, wo $\lambda \geq 2$, ist neben $[(x), (x^2, y)]$ auch $[(x), (x^2, \mu x + y)]$ für beliebiges μ eine reduzierte Darstellung.

reduziert ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß mit den reduzierten Darstellungen:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_\varrho \mathfrak{C}];\; \mathfrak{C} = [\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2] \quad \text{auch} \quad \mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_\varrho \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2]$$

reduziert ist. In der Tat geht hier nach Voraussetzung kein $\mathfrak{B}$ in seinem Komplement auf; wäre dies für ein $\mathfrak{C}_i$ der Fall, so wäre gegen die Voraussetzung in der ersten Darstellung $\mathfrak{C}$ durch einen echten Teiler ersetzbar, da wegen der zweiten reduzierten Darstellung $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ echte Teiler von $\mathfrak{C}$ sind; die Darstellung wird also eine kürzeste. Ferner läßt sich nach Voraussetzung kein $\mathfrak{B}$ durch einen echten Teiler ersetzen; wäre dies für ein $\mathfrak{C}_i$ der Fall, so entspräche dies gegen Voraussetzung dem Ersetzen von $\mathfrak{C}$ durch einen echten Teiler, da die Darstellung für $\mathfrak{C}$ reduziert ist. Somit ist der *Hilfssatz bewiesen.*

Definition II. *Ein Ideal $\mathfrak{M}$ heißt reduzibel, wenn es als kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei echten Teilern darstellbar ist; im entgegengesetzten Fall heißt $\mathfrak{M}$ irreduzibel.*

Wir beweisen jetzt vermöge des Satzes I von der endlichen Kette unter Benutzung der reduzierten Darstellung

Satz II. *Jedes Ideal ist darstellbar als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen Idealen*[12]).

Es ist nämlich ein beliebiges Ideal $\mathfrak{M}$ entweder irreduzibel; dann ist $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}]$ eine Darstellung, wie Satz II verlangt; oder aber es wird $\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1]$, wo $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ echte Teiler von $\mathfrak{M}$ sind, und wo die Darstellung nach Hilfssatz I als reduziert angenommen werden kann. Für $\mathfrak{C}_1$ gilt die gleiche Alternative; entweder es ist irreduzibel oder es gibt eine reduzierte Darstellung: $\mathfrak{C}_1 = [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2]$.

So fortfahrend erhält man die Reihe reduzierter Darstellungen:

$$(1) \qquad \mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1];\; \mathfrak{C}_1 = [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2];\; \ldots,\; \mathfrak{C}_{\nu-1} = [\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu];\; \ldots.$$

In der Kette $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\nu, \ldots$ ist also jeweils $\mathfrak{C}_i$ ein echter Teiler des unmittelbar vorangehenden, und folglich bricht die Kette im Endlichen ab; es gibt einen Index n, so daß $\mathfrak{C}_n$ irreduzibel wird. Nach Hilfssatz I ist ferner die Darstellung: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_n \mathfrak{C}_n]$ reduziert; $\mathfrak{C}_n$ kann also nicht in seinem Komplement $\mathfrak{A}_n$ aufgehen, und in der Darstellung: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_n, \mathfrak{C}_n]$ ist $\mathfrak{C}_n$ durch keinen echten Teiler ersetzbar. Ersetzt man

---

[12]) Daß eine solche Darstellung im allgemeinen nicht eindeutig ist, zeigt das vorige Beispiel: $(x^2, xy) = [(x), (x^2, \mu x + y)]$. Die beiden Komponenten sind bei beliebigem μ irreduzibel. Alle Teiler von (x) sind nämlich von der Form $(x, g(y))$, wo $g(y)$ ein Polynom in y bedeutet; also hat auch das kleinste gemeinsame Vielfache von zweien dieser Form, wird also ein echter Teiler von (x); $(x^2, \mu x + y)$ besitzt nur den *einen* Teiler (x, y), ist also notwendigerweise ebenfalls irreduzibel.

nötigenfalls $\mathfrak{A}_n$ durch einen echten Teiler[13]), so daß die Darstellung reduziert wird, so ist damit gezeigt, daß jedes *reduzible Ideal eine reduzierte Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches eines irreduziblen und eines dazu komplementären Ideals zuläßt.* In der Reihe (1) können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle $\mathfrak{B}_i$ als irreduzibel angenommen werden; die Wiederholung der obigen Schlußweise ergibt die Existenz eines irreduziblen $\mathfrak{C}_n$, womit *Satz* II *bewiesen ist.*

§ 3.

Anzahlgleichheit der Komponenten bei zwei verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Ideale.

Zum Beweise der Anzahlgleichheit ist vorerst die Reduzibilität bzw. Irreduzibilität eines Ideals durch Eigenschaften seines Komplementes auszudrücken nach

Satz III[14]). *Die kürzeste Darstellung* $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}]$ *sei reduziert in bezug auf* $\mathfrak{C}$. *Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $\mathfrak{C}$ *reduzibel ist, die Existenz von zwei Idealen* $\mathfrak{N}_1$ *und* $\mathfrak{N}_2$, *die echte Teiler von* $\mathfrak{M}$ *sind, derart, daß*

(2) $$\mathfrak{N}_1 \equiv 0(\mathfrak{A});\quad \mathfrak{N}_2 \equiv 0(\mathfrak{A});\quad [\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2] = \mathfrak{M}.$$

Hieraus folgt noch: *Sind die Bedingungen* (2) *erfüllt, und* $\mathfrak{C}$ *irreduzibel, so ist mindestens ein* $\mathfrak{N}_i$ *kein echter Teiler von* $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}$.

Es sei $\mathfrak{C} = [\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2]$, wo $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ echte Teiler von $\mathfrak{C}$ seien. Dann kommt:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2] = [[\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_1], [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_2]].$$

Hier sind die Ideale $[\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_i]$ echte Teiler von $\mathfrak{M}$, da sonst $[\mathfrak{A}, \mathfrak{C}]$ nicht reduziert in bezug auf $\mathfrak{C}$ wäre. Da auch die Teilbarkeit durch $\mathfrak{A}$ erfüllt ist, ist die *Bedingung* (2) *als notwendig erwiesen.* (Die Darstellung (2) ist nicht reduziert, da ein $[\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_i]$ durch $\mathfrak{C}_i$ ersetzbar ist.)

Sei nun umgekehrt (2) erfüllt. Wir bilden die Ideale:

$$\mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{C}, \mathfrak{N}_1);\quad \mathfrak{C}_2 = (\mathfrak{C}, \mathfrak{N}_2);\quad \mathfrak{C}^* = [\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2].$$

Dann ist $\mathfrak{C}$ sowohl durch $\mathfrak{C}_1$, wie durch $\mathfrak{C}_2$, also auch durch das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathfrak{C}^*$ teilbar. Um die Teilbarkeit von $\mathfrak{C}^*$ durch $\mathfrak{C}$ zu zeigen, sei

---

[13]) Tatsächlich ist die Darstellung auch in bezug auf $\mathfrak{A}_n$ reduziert, wie in § 3 (Hilfssatz IV) als Umkehrung von Hilfssatz I gezeigt werden wird.

[14]) Satz III entspricht dem Übergang von den Moduln zu den Restgruppen in den Arbeiten von Schmeidler und Noether-Schmeidler (vgl. die Einleitung). Es entspricht $\mathfrak{A}$ der Restgruppe, $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ den Untergruppen, in welche die Restgruppe zerlegt wird.

$f \equiv 0(\mathfrak{C}^*)$; also $f \equiv 0(\mathfrak{C}_1)$; $f \equiv 0(\mathfrak{C}_2)$ oder auch $f = c + n_1$; $f = \bar{c} + n_2$, wo $c, \bar{c}, n_1, n_2$ Größen aus $\mathfrak{C}, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ sind, also insbesondere n_i durch $\mathfrak{A}$ teilbar ist. Somit ist die Differenz

$$g = c - \bar{c} = n_2 - n_1$$

sowohl durch $\mathfrak{C}$ wie durch $\mathfrak{A}$, also durch $\mathfrak{M}$ teilbar. Wegen $n_1 = n_2 + m$ ist ferner n_1 (ebenso n_2) sowohl durch $\mathfrak{N}_1$ wie durch $\mathfrak{N}_2$, also durch $\mathfrak{M}$ teilbar. Also wird

$$f = c + m; \quad f \equiv 0(\mathfrak{C}); \quad \mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}.$$

$\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ sind dabei echte Teiler von $\mathfrak{C}$; denn für $\mathfrak{C}_i = (\mathfrak{C}, \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{C}$ wäre $\mathfrak{N}_i$ durch $\mathfrak{C}$ teilbar, also wäre $\mathfrak{N}_i$ wegen der Teilbarkeit durch $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{M}$ gegen die Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{C} = [\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2]$ als reduzibel erkannt; *Satz* III *bewiesen.*

Es sei bemerkt, daß fast die gleiche Überlegung noch das folgende zeigt:

Hilfssatz II. *Läßt sich in einer kürzesten Darstellung* $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}]$, *das Ideal* $\mathfrak{C}$ *durch einen echten Teiler ersetzen, so ist* $\mathfrak{C}$ *reduzibel.*

Sei also:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_1],$$

und sei gesetzt:

$$\mathfrak{C}^* = [\mathfrak{C}_1, (\mathfrak{A}, \mathfrak{C})],$$

dann ist wieder $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}^*$ teilbar. Aus $f \equiv 0(\mathfrak{C}^*)$ folgt ferner:

$$f = c_1 = a + c.$$

Die Differenz $a = c_1 - c$ ist also sowohl durch $\mathfrak{A}$, wie durch $\mathfrak{C}_1$, folglich durch $\mathfrak{M}$ teilbar; also wird $c_1 = c + m$; $f \equiv 0(\mathfrak{C})$; $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}$.

Da sowohl $\mathfrak{C}_1$ wie $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ nach Voraussetzung echte Teiler von $\mathfrak{C}$ sind, ist somit $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^*$ als reduzibel erkannt.

Ein *irreduzibles* $\mathfrak{C}$ läßt sich also nicht durch einen echten Teiler ersetzen.

Es seien jetzt *zwei verschiedene kürzeste Darstellungen von* $\mathfrak{M}$ *als kleinstes gemeinsames Vielfaches von* (*endlich*) *vielen irreduziblen Idealen gegeben*:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_k] = [\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_l].$$

Diese Darstellungen sind nach der Bemerkung zu Hilfssatz II zugleich *reduziert*. Dann beweisen wir vorerst

Hilfssatz III. *Zu jedem Komplement* $\mathfrak{A}_i = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_{i-1} \mathfrak{B}_{i+1} \ldots \mathfrak{B}_k]$ *gibt es ein Ideal* $\mathfrak{D}_j$ *derart, daß* $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{D}_j]$ *wird.*

Setzt man nämlich: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{C}_1]$, $\mathfrak{C}_1 = [\mathfrak{D}_2, \mathfrak{C}_{12}]$ usf., so kommt:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{M}] = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{C}_1] = [[\mathfrak{A}_i \mathfrak{D}_1], [\mathfrak{A}_i \mathfrak{C}_1]].$$

Hier sind für $\mathfrak{N}_1 = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{D}_1]$, $\mathfrak{N}_2 = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{C}_1]$ die Bedingungen (2) von Satz II erfüllt, da $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i]$ reduziert in bezug auf $\mathfrak{B}_i$ ist und die Darstellung eine kürzeste ist. Da nun $\mathfrak{B}_i$ als *irreduzibel* vorausgesetzt war, muß notwendig ein $\mathfrak{N}_i$ gleich $\mathfrak{M}$ werden.

Für $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}$ wäre der Hilfssatz bewiesen; für $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}$ kommt entsprechend: $\mathfrak{M} = [[\mathfrak{A}_i \mathfrak{D}_2], [\mathfrak{A}_i \mathfrak{C}_{12}]]$, wo nach dem gleichen Schluß wieder eine Komponente gleich $\mathfrak{M}$ werden muß. So fortfahrend, kommt entweder: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{D}_j]$, wo $j < l$; oder es wird $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_i, \mathfrak{C}_{1\ldots l-1}]$; wegen $\mathfrak{C}_{1\ldots l-1} = \mathfrak{D}_l$ ist damit der *Hilfssatz bewiesen*.

Hieraus ergibt sich nun

Satz IV. *Bei zwei verschiedenen kürzesten Darstellungen eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen ist die Anzahl der Komponenten die gleiche.*

Aus dem Hilfssatz ergibt sich nämlich für $i = 1$:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1] = [\mathfrak{A}_1, \mathfrak{D}_{j_1}] = [\mathfrak{D}_{j_1}, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k].$$

Betrachtet man nun die beiden Zerlegungen:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{D}_{j_1}, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k] = [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_l],$$

und wiederholt den obigen Schluß in bezug auf das Komplement $\bar{\mathfrak{A}}_2 = [\mathfrak{D}_{j_1}, \mathfrak{B}_3, \ldots, \mathfrak{B}_k]$ von $\mathfrak{B}_2$, so kommt:

$$\mathfrak{M} = [\bar{\mathfrak{A}}_2, \mathfrak{B}_2] = [\bar{\mathfrak{A}}_2, \mathfrak{D}_{j_2}] = [\mathfrak{D}_{j_1}, \mathfrak{D}_{j_2}, \mathfrak{B}_3, \ldots, \mathfrak{B}_k];$$

und durch Fortsetzung des Verfahrens:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{D}_{j_1}, \mathfrak{D}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{D}_{j_k}].$$

Da nun nach Voraussetzung die Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_l]$ eine kürzeste ist, also kein $\mathfrak{D}$ weggelassen werden kann, müssen die *verschiedenen* unter den $\mathfrak{D}_{j_i}$ alle $\mathfrak{D}$ erschöpfen; somit kommt: $k \geqq l$. Vertauscht man im Hilfssatz und den anschließenden Schlüssen durchweg die $\mathfrak{B}$ mit den $\mathfrak{D}$, so kommt entsprechend: $l \geqq k$, und somit $k = l$, womit die *Anzahlgleichheit* bewiesen ist. — Daraus ergibt sich noch, daß die Ideale $\mathfrak{D}_{j_i}$ alle untereinander verschieden sind, da sonst in einer kürzesten Darstellung durch die $\mathfrak{D}_{j_i}$ weniger als k Komponenten auftreten würden; man kann also die Bezeichnung so wählen, daß $\mathfrak{D}_{j_i} = \mathfrak{D}_i$ wird. Aus dem gleichen Grunde sind auch alle Zwischendarstellungen $\mathfrak{M} = [\mathfrak{D}_{j_1} \ldots \mathfrak{D}_{j_i}, \mathfrak{B}_{i+1} \ldots \mathfrak{B}_k]$ kürzeste und nach der Bemerkung zu Hilfssatz II somit reduzierte.

Die Anzahlgleichheit führt zu einer Umkehrung von Hilfssatz I durch

Hilfssatz IV. *Faßt man in einer reduzierten Darstellung die Komponenten zu Gruppen zusammen und bildet deren kleinstes gemeinsames Vielfaches, so wird die entstehende Darstellung reduziert.* M. a. W.: *Aus einer reduzierten Darstellung*

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{C}_{11} \ldots \mathfrak{C}_{1\mu_1}; \ldots; \mathfrak{C}_{\sigma 1} \ldots \mathfrak{C}_{\sigma\mu_\sigma}]$$

folgt, daß auch $\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_\sigma] = [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{L}_i]$ *reduziert ist, wenn* $\mathfrak{N}_i = [\mathfrak{C}_{i1} \ldots \mathfrak{C}_{i\mu_i}]$ *gesetzt ist.*

Zuerst ist zu bemerken, daß $\mathfrak{N}_i$ nicht in seinem Komplement $\mathfrak{L}_i$ aufgehen kann, da dies für keinen seiner Teiler $\mathfrak{C}_{ij}$ der Fall ist; die Darstellung ist also eine kürzeste. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{N}_i$ durch keinen echten Teiler ersetzbar ist, lösen wir die $\mathfrak{C}$ in ihre irreduziblen Ideale $\mathfrak{B}$ auf[18]), so daß die (nach Hilfssatz I) reduzierten Darstellungen enstehen:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_{11} \ldots \mathfrak{B}_{1\lambda_1}; \ldots; \mathfrak{B}_{\sigma 1} \ldots \mathfrak{B}_{\sigma\lambda_\sigma}]; \qquad \mathfrak{N}_i = [\mathfrak{B}_{i1} \ldots \mathfrak{B}_{i\lambda_i}].$$

Es sei nun $\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}_i^*, \mathfrak{L}_i]$ reduziert in bezug auf $\mathfrak{N}_i^*$, und $\mathfrak{N}_i^*$ ein *echter* Teiler von $\mathfrak{N}_i$. Nach Hilfssatz II wird:

$$\mathfrak{N}_i = [\mathfrak{N}_i^*, (\mathfrak{N}_i, \mathfrak{L}_i)];$$

und diese Darstellung ist notwendig reduziert in bezug auf $\mathfrak{N}_i^*$, da sich sonst $\mathfrak{N}_i^*$ auch in $\mathfrak{M}$ durch einen echten Teiler ersetzen ließe. Man ersetze nun gegebenenfalls auch $(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{L}_i)$ durch einen echten Teiler, so daß eine reduzierte Darstellung für $\mathfrak{N}_i$ entsteht. Löst man jetzt die beiden Komponenten von $\mathfrak{N}_i$ in irreduzible Ideale auf, so setzt sich die Anzahl λ_i der irreduziblen Ideale von $\mathfrak{N}_i$ additiv aus der der Komponenten zusammen; die Anzahl der dem echten Teiler $\mathfrak{N}_i^*$ entsprechenden irreduziblen Ideale wird also notwendig kleiner als λ_i. Dann führt aber auch die Auflösung von $\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}_i^*, \mathfrak{L}]$ in irreduzible Ideale zu weniger als $\sum\limits_i \lambda_i$ Ideale, im *Widerspruch mit der Anzahlgleichheit*. Als Spezialfall $\sigma = 2$ folgt noch, daß die Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{L}_i]$ auch in bezug auf das Komplement $\mathfrak{L}_i$ reduziert ist.

§ 4.

Primäre Ideale. Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale bei zwei verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Ideale.

Es handelt sich im folgenden um den Zusammenhang zwischen primären und irreduziblen Idealen.

Definition III. *Ein Ideal* $\mathfrak{Q}$ *heißt primär, wenn aus* $a \cdot b \equiv 0 (\mathfrak{Q})$; $a \not\equiv 0 (\mathfrak{Q})$ *notwendig folgt*: $b^\varkappa \equiv 0 (\mathfrak{Q})$, *wo der Exponent* $\varkappa$ *eine endliche Zahl ist.*

Die Definition läßt sich auch so aussprechen: Ist ein Produkt $a \cdot b$ durch $\mathfrak{Q}$ teilbar, so ist entweder ein Faktor teilbar oder eine Potenz jedes Faktors. *Ist insbesondere* $\varkappa$ *stets gleich* 1, *so heißt das Ideal ein Primideal.*

[18]) Darunter ist immer eine kürzeste, also reduzierte Darstellung durch die $\mathfrak{B}$ zu verstehen.

Aus der Definition des primären (bzw. Prim-) Ideals folgt vermöge der Basisexistenz die nur von Produkten von Idealen[16]) handelnde

Definition IIIa. *Ein Ideal* $\mathfrak{Q}$ *heißt primär, wenn aus* $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\equiv 0(\mathfrak{Q})$; $\mathfrak{A}\not\equiv 0(\mathfrak{Q})$ *notwendig folgt*: $\mathfrak{B}^{\lambda}\equiv 0(\mathfrak{Q})$. *Ist* λ *stets gleich* 1, *so heißt das Ideal ein Primideal. Für ein Primideal* $\mathfrak{P}$ *folgt also aus* $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\equiv 0(\mathfrak{P})$, $\mathfrak{A}\not\equiv 0(\mathfrak{P})$ *stets* $\mathfrak{B}\equiv 0(\mathfrak{P})$.

Da nämlich in IIIa für $\mathfrak{A}=(a)$, $\mathfrak{B}=(b)$ die Definition III als Spezialfall enthalten ist, ist jedes nach IIIa primäre Ideal auch primär nach III. Sei umgekehrt $\mathfrak{Q}$ primär nach III, und sei die Voraussetzung von IIIa erfüllt: $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\equiv 0(\mathfrak{Q})$, so daß also entweder $\mathfrak{A}\equiv 0(\mathfrak{Q})$ folgt, oder aber daß es mindestens eine Größe $a\equiv 0(\mathfrak{A})$ gibt, so daß $a\cdot\mathfrak{B}\equiv 0(\mathfrak{Q})$, $a\not\equiv 0(\mathfrak{Q})$ wird. Ist nun $b_1 \ldots b_r$ eine Idealbasis von $\mathfrak{B}$, so kommt nach Definition III, da $a\cdot b_i\equiv 0(\mathfrak{Q})$ wird:

$$b_1^{\varkappa_1}\equiv 0(\mathfrak{Q});\ \ldots;\ b_r^{\varkappa_r}\equiv 0(\mathfrak{Q}).$$

Wegen $b=f_1 b_1+\ldots+f_r b_r+n_1 b_1+\ldots+n_r b_r$ wird also für $\lambda=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_r$ das Produkt von je λ Größen b durch $\mathfrak{Q}$ teilbar, womit für nach III primäre Ideale das Erfülltsein der Definition IIIa bewiesen ist. Speziell für Primideale $\mathfrak{P}$ folgt aber aus: $a\cdot\mathfrak{B}\equiv 0(\mathfrak{P})$, also auch $a\cdot b\equiv 0(\mathfrak{P})$ für jedes $b\equiv 0(\mathfrak{B})$ und $a\not\equiv 0(\mathfrak{P})$, daß $b\equiv 0(\mathfrak{P})$ und damit $\mathfrak{B}\equiv 0(\mathfrak{P})$. Damit ist die Äquivalenz der beiden Definitionen gezeigt.

Der Zusammenhang zwischen primären und Prim-Idealen wird hergestellt durch die Bemerkung, daß die Gesamtheit $\mathfrak{P}$ aller Elemente p von der Eigenschaft, daß eine Potenz von p durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist, ein *Primideal* bildet. Zunächst ist klar, daß $\mathfrak{P}$ ein Ideal ist; da neben p_1 und p_2 auch ap_1 und (p_1-p_2) die genannte Eigenschaft zukommt. Nach dem bei der Definition von IIIa angewandten Basisschluß ergibt sich ferner die Existenz einer Zahl λ, derart, daß $\mathfrak{P}^{\lambda}\equiv 0(\mathfrak{Q})$ wird.

Sei jetzt:

$$a\cdot b\equiv 0(\mathfrak{P});\qquad a\not\equiv 0(\mathfrak{P}),$$

so kommt nach der Definition von $\mathfrak{P}$:

$$a^{\lambda}\cdot b^{\lambda}\equiv 0(\mathfrak{Q});\qquad a^{\lambda}\not\equiv 0(\mathfrak{Q});$$

also nach der Definition von $\mathfrak{Q}$:

$$b^{\lambda\varkappa}\equiv 0(\mathfrak{Q})\ \text{ und folglich }\ b\equiv 0(\mathfrak{P}),$$

womit $\mathfrak{P}$ *als Primideal nachgewiesen ist.* $\mathfrak{P}$ ist auch definiert als größter gemeinsamer Teiler aller Ideale $\mathfrak{B}$ von der Eigenschaft, daß eine Potenz von $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist. Denn jedes solche $\mathfrak{B}$ ist nach Definition

[16]) Unter dem Produkte $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ zweier Ideale wird, wie üblich, das aus der Gesamtheit der Größen $a\cdot b$ und ihren endlichen Summen bestehende Ideal verstanden.

durch $\mathfrak{P}$ teilbar; also auch der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{D}$ dieser $\mathfrak{B}$. Umgekehrt ist $\mathfrak{P}$ selbst ein Ideal $\mathfrak{B}$, also durch $\mathfrak{D}$ teilbar, womit $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}$ erwiesen ist. $\mathfrak{P}$ ist also ein Primideal, das Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist und von dem eine Potenz durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist; durch diese Eigenschaft ist es eindeutig definiert. Denn aus:

$$\mathfrak{Q} \equiv 0(\mathfrak{P});\quad \mathfrak{P}^{\lambda} \equiv 0(\mathfrak{Q});\quad \mathfrak{Q} \equiv 0(\overline{\mathfrak{P}});\quad \overline{\mathfrak{P}}^{\mu} \equiv 0(\mathfrak{Q})$$

folgt:

$$\mathfrak{P}^{\lambda} \equiv 0(\overline{\mathfrak{P}});\quad \overline{\mathfrak{P}}^{\mu} \equiv 0(\mathfrak{P});$$

also nach der Eigenschaft der Primideale:

$$\mathfrak{P} \equiv 0(\overline{\mathfrak{P}});\quad \overline{\mathfrak{P}} \equiv 0(\mathfrak{P});\quad \mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}}.$$

Zusammenfassend haben wir

Satz V. *Zu jedem primären Ideal $\mathfrak{Q}$ existiert ein und nur ein Primideal $\mathfrak{P}$, das Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist und von dem eine Potenz durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist; $\mathfrak{P}$ soll als „zugehöriges Primideal“ bezeichnet werden*[17]). *$\mathfrak{P}$ ist definiert als größter gemeinsamer Teiler aller Ideale $\mathfrak{B}$ von der Eigenschaft, daß eine Potenz von $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist. Ist ϱ die kleinste Zahl derart, daß $\mathfrak{P}^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{Q})$, so soll ϱ als Exponent von $\mathfrak{Q}$ bezeichnet werden*[18]).

Wir beweisen jetzt, als Zusammenhang zwischen primär und irreduzibel:

Satz VI. *Jedes nichtprimäre Ideal ist reduzibel; m. a. W.: jedes irreduzible Ideal ist primär*[19]).

Es sei $\mathfrak{K}$ ein *nichtprimäres* Ideal, so daß nach Definition III mindestens ein Größenpaar a, b existiert, derart, daß

(3) $\qquad a \cdot b \equiv 0(\mathfrak{K});\quad a \not\equiv 0(\mathfrak{K});\quad b^{\varkappa} \not\equiv 0(\mathfrak{K})$ für jedes $\varkappa$.

---

17) Daß die Umkehrung nicht gilt, zeigt das Beispiel $\mathfrak{M} = (x^2, xy)$. Das Primideal (x) erfüllt alle Bedingungen, aber $\mathfrak{M}$ ist nicht primär.

18) Daß im allgemeinen nicht, wie im Bereich der ganzen rationalen, bzw. algebraischen Zahlen, $\mathfrak{P}^{\varrho} = \mathfrak{Q}$ wird, zeigt das Beispiel:

$$\mathfrak{Q} = (x^2, y);\quad \mathfrak{P} = (x, y);\quad \mathfrak{P}^2 = (x^2, xy, y^2) \equiv 0(\mathfrak{Q});\quad \text{aber } \mathfrak{Q} \not\equiv 0(\mathfrak{P}^2);$$

also $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}^2$ verschieden.

19) Daß hier die Umkehrung nicht gilt, zeigt etwa das Beispiel:

$$\mathfrak{Q} = (x^2, xy, y^{\lambda}) = [(x^2, y), (x, y^{\lambda})],$$

wo $\lambda \geq 2$. Hier ist $\mathfrak{Q}$ primär, aber reduzibel. (Daß $\mathfrak{Q}$ primär ist, folgt daraus, daß es alle Potenzprodukte λ-ter Dimension von x, y enthält; für jedes Polynom ohne konstantes Glied ist also eine Potenz durch $\mathfrak{Q}$ teilbar. Enthält aber in $a \cdot b \equiv 0(\mathfrak{Q})$ das Polynom b ein konstantes Glied — also $b^{\varkappa} \not\equiv 0(\mathfrak{Q})$ für jedes $\varkappa$ —, so muß, da wegen der Homogenität der Basispolynome von $\mathfrak{Q}$ jeder homogene Bestandteil von $a \cdot b$ durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist, a durch $\mathfrak{Q}$ teilbar sein.)

Wir bilden nun die beiden Ideale:

$$\mathfrak{L}_0 = (\mathfrak{R}, a); \quad \mathfrak{N}_0 = (\mathfrak{R}, b),$$

die nach (3) echte Teiler von $\mathfrak{R}$ sind und für die nach (3) gilt:

$$\mathfrak{L}_0 \cdot \mathfrak{N}_0 \equiv 0(\mathfrak{R}). \tag{4}$$

Für die Elemente f des kleinsten gemeinsamen Vielfachen $\mathfrak{R}_0 = [\mathfrak{L}_0, \mathfrak{N}_0]$ gilt nun die Alternative:

Entweder es folgt aus

$$f \equiv 0(\mathfrak{L}_0); \quad f \equiv 0(\mathfrak{N}_0), \quad \text{d. h.} \quad f \equiv a_1 \cdot b(\mathfrak{R})$$

stets eine Darstellung:

$$f \equiv l_0 \cdot b(\mathfrak{R}); \quad l_0 \equiv 0(\mathfrak{L}_0);$$

also nach (4): $f \equiv 0(\mathfrak{R})$, somit $\mathfrak{R}_0 \equiv 0(\mathfrak{R})$, und wegen $\mathfrak{R} \equiv 0(\mathfrak{R}_0)$ auch $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$, womit $\mathfrak{R}$ als *reduzibel* nachgewiesen ist.

Oder es gibt mindestens ein $f \equiv 0(\mathfrak{R}_0)$, für das kein solches l_0 existiert. Wir bilden dann mit dem zu diesem f gehörigen a_1:

$$\mathfrak{L}_1 = (\mathfrak{L}_0, a_1) = (\mathfrak{R}, a, a_1); \quad \mathfrak{N}_1 = (\mathfrak{R}, b^2).$$

Dann wird wegen $a_1 \cdot b \equiv 0(\mathfrak{L}_0)$ nach (4) auch:

$$\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{N}_1 \equiv 0(\mathfrak{R}); \tag{4'}$$

und $\mathfrak{L}_1$ wird ein *echter* Teiler von $\mathfrak{L}_0$.

Für die Elemente f von $\mathfrak{R}_1 = [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{N}_1]$ gilt die gleiche Alternative:

Entweder es folgt aus

$$f \equiv 0(\mathfrak{L}_1); \quad f \equiv 0(\mathfrak{N}_1);$$

d. h.: $f \equiv a_2 \cdot b^2(\mathfrak{R})$ stets:

$$f \equiv l_1 \cdot b^2; \quad l_1 \equiv 0(\mathfrak{L}_1);$$

und damit nach (4'):

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1.$$

Oder für mindestens ein f gibt es kein solches l_1, was zur Bildung von $\mathfrak{L}_2 = (\mathfrak{L}_1, a_2)$, $\mathfrak{N}_2 = (\mathfrak{R}, b^{2^2})$ führt; mit $\mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{N}_2 \equiv 0(\mathfrak{R})$, wo $\mathfrak{L}_2$ ein *echter* Teiler von $\mathfrak{L}_1$ ist. — So fortfahrend, definieren wir allgemein:

$$\mathfrak{L}_0 = (\mathfrak{R}, a); \; \mathfrak{L}_1 = (\mathfrak{L}_0, a_1); \; \ldots; \; \mathfrak{L}_\nu = (\mathfrak{L}_{\nu-1}, a_\nu); \; \ldots;$$

$$\mathfrak{N}_0 = (\mathfrak{R}, b); \; \mathfrak{N}_1 = (\mathfrak{R}, b^2); \; \ldots; \; \mathfrak{N}_\nu = (\mathfrak{R}, b^{2^\nu}); \; \ldots,$$

wo die a_i dadurch definiert sind, daß es ein f gibt, derart, daß

$$f \equiv 0(\mathfrak{L}_{i-1}); \quad f \equiv 0(\mathfrak{N}_{i-1}),$$

d. h.

$$f \equiv a_i \cdot b^{2^{i-1}}(\mathfrak{R}); \quad \text{aber} \quad a_i \not\equiv 0(\mathfrak{L}_{i-1})$$

wird. Danach wird allgemein $\mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{N}_i \equiv 0(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{N}_i$ nach (3) ein *echter* Teiler

von $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{L}_i$ ein *echter* Teiler von $\mathfrak{L}_{i-1}$. Nach Satz I von der endlichen Kette muß also die *Kette der $\mathfrak{L}$ im Endlichen, etwa mit $\mathfrak{L}_n$, abbrechen.* Für jedes $f \equiv 0\,(\mathfrak{L}_n)$; $f \equiv 0\,(\mathfrak{N}_n)$ wird also $f \equiv l_n \cdot b^{\varrho^n}\,(\mathfrak{K})$ mit $l_n \equiv 0\,(\mathfrak{L}_n)$, und folglich kommt nach dem obigen Schluß: $\mathfrak{K} = [\mathfrak{L}_n, \mathfrak{N}_n]$, *womit $\mathfrak{K}$ als reduzibel nachgewiesen ist.*

Aus dem eben Bewiesenen ergibt sich die *Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale* wie folgt:

Es seien

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_k] = [\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_k]$$

zwei kürzeste, also reduzierte Darstellungen von $\mathfrak{M}$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Idealen, deren Anzahl nach Satz IV übereinstimmt. Dann sind nach diesem Satz auch die dort auftretenden Zwischendarstellungen (wo, wie dort bemerkt, der Index $j_i = i$ gesetzt werden kann):

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= [\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_{i-1} \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_{i+1} \ldots \mathfrak{B}_k] = [\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_{i-1} \mathfrak{D}_i \mathfrak{B}_{i+1} \ldots \mathfrak{B}_k] \\ &= [\overline{\mathfrak{A}}_i, \mathfrak{B}_i] = [\overline{\mathfrak{A}}_i, \mathfrak{D}_i]\end{aligned}$$

kürzeste Darstellungen. Es kommt also:

$$\overline{\mathfrak{A}}_i \cdot \mathfrak{B}_i \equiv 0\,(\mathfrak{D}_i), \quad \overline{\mathfrak{A}}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{D}_i); \quad \overline{\mathfrak{A}}_i \cdot \mathfrak{D}_i \equiv 0\,(\mathfrak{B}_i), \quad \overline{\mathfrak{A}}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{B}_i).$$

Da nun nach Satz VI die irreduziblen Ideale $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{D}_i$ primär sind, folgt daraus die Existenz zweier Zahlen λ_i und μ_i, derart, daß

$$(5) \qquad \mathfrak{B}_i^{\lambda_i} \equiv 0\,(\mathfrak{D}_i); \quad \mathfrak{D}_i^{\mu_i} \equiv 0\,(\mathfrak{B}_i).$$

Bezeichnen nun $\mathfrak{P}_i$ bzw. $\overline{\mathfrak{P}}_i$ die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{B}_i$ bzw. $\mathfrak{D}_i$; also $\mathfrak{P}_i^{\varrho_i} \equiv 0\,(\mathfrak{B}_i)$; $\overline{\mathfrak{P}}_i^{\sigma_i} \equiv 0\,(\mathfrak{D}_i)$, so kommt nach (5):

$$\mathfrak{P}_i^{\lambda_i \varrho_i} \equiv 0\,(\overline{\mathfrak{P}}_i); \quad \overline{\mathfrak{P}}_i^{\mu_i \sigma_i} \equiv 0\,(\mathfrak{P}_i),$$

und daraus nach der Eigenschaft der Primideale:

$$\mathfrak{P}_i \equiv 0\,(\overline{\mathfrak{P}}_i); \quad \overline{\mathfrak{P}}_i \equiv 0\,(\mathfrak{P}_i); \quad \mathfrak{P}_i = \overline{\mathfrak{P}}_i.$$

Damit ist bewiesen:

Satz VII. *Bei zwei verschiedenen kürzesten Darstellungen eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Idealen stimmen die zugehörigen Primideale, unter denen auch gleiche*[20]) *und zwar bei jeder Zerlegung gleich oft auftreten können, überein. Die Ideale selbst lassen sich folglich auf mindestens eine Art derart paarweise zuordnen, daß jeweils eine Potenz des einen Ideals $\mathfrak{B}_i$ durch das zugeord-*

---

[20]) Das zeigt etwa das Beispiel von [19]):

$$(x^2, xy, y^\lambda) = [(x^2, y), (x, y^\lambda)],$$

wo $\lambda \geqq 2$. Die beiden zugehörigen Primideale sind hier: (x, y).

nete $\mathfrak{D}_i$ teilbar ist und umgekehrt. Ihre Anzahl stimmt nach Satz IV *überein*[21]).

§ 5.

Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären Idealen. Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale.

Definition IV. *Eine kürzeste Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_a]$ soll als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären Idealen bezeichnet werden, wenn alle $\mathfrak{Q}$ primär sind, aber das kleinste gemeinsame Vielfache zweier $\mathfrak{Q}$ nicht mehr primär ist.*

Daß mindestens eine solche Darstellung stets existiert, folgt aus der Darstellung von $\mathfrak{M}$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Idealen. Denn diese Ideale sind primär; entweder liegt nun schon eine Darstellung durch größte primäre vor, oder aber das kleinste gemeinsame Vielfache irgend zweier Ideale wird wieder primär. Da hier die Anzahl der Ideale um eins abgenommen hat, führt die Wiederholung des Verfahrens nach endlich vielen Schritten zu der gewünschten Darstellung.

Diese Darstellung ist nach Hilfssatz IV reduziert. Umgekehrt entsteht jede reduzierte Darstellung durch größte primäre Ideale auf diese Art, wie die Auflösung der $\mathfrak{Q}$ in irreduzible Ideale zeigt.

Um hier aus Satz VII einen entsprechenden Eindeutigkeitssatz zu folgern, ist der Zusammenhang mit den zugehörigen Primidealen zu untersuchen nach

Satz VIII. *Besitzen die primären Ideale $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\lambda$ alle dasselbe zugehörige Primideal $\mathfrak{P}$, so ist auch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches $\mathfrak{Q} = [\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\lambda]$ primär und hat $\mathfrak{P}$ zum zugehörigen Primideal. Ist umgekehrt $\mathfrak{Q} = [\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_\lambda]$ eine reduzierte Darstellung für das primäre Ideal $\mathfrak{Q}$, so sind alle $\mathfrak{R}_i$ primär und besitzen als zugehöriges Primideal das zugehörige Primideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{Q}$.*

Zum Nachweis des ersten Teiles der Behauptung sei zunächst bemerkt, daß aus $\mathfrak{P}^{\varrho_i} \equiv 0\,(\mathfrak{R}_i)$ für jedes i auch folgt: $\mathfrak{P}^{\tau} \equiv 0\,(\mathfrak{Q})$, wo τ den größten der Indizes ϱ_i bedeutet. Da $\mathfrak{P}$ ferner auch Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist, ist $\mathfrak{P}$ notwendig das zugehörige Primideal, wenn $\mathfrak{Q}$ primär ist. Aus

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}); \qquad \mathfrak{B}^k \not\equiv 0\,(\mathfrak{Q}) \text{ (für jedes } k)$$

folgt somit $\quad \mathfrak{B} \not\equiv 0\,(\mathfrak{P})$; also $\mathfrak{B}^k \not\equiv (\mathfrak{R}_i)$ (für jedes k);

und somit $\quad \mathfrak{A} \equiv 0\,(\mathfrak{R}_i)$; also $\mathfrak{A} \equiv 0\,(\mathfrak{Q})$,

womit $\mathfrak{Q}$ als primär, $\mathfrak{P}$ als zugehöriges Primideal erwiesen ist.

---

[21]) Für die Eindeutigkeit der unter den irreduziblen Idealen enthaltenen „isolierten" Ideale vgl. § 7.

Sei umgekehrt vorerst

$$\mathfrak{Q} = [\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_\lambda] = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i]$$

eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{Q}$ durch *primäre* Ideale $\mathfrak{R}_i$ und seien jeweils $\mathfrak{P}_i$ die zugehörigen Primideale. Aus

$$\mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{R}_i \equiv 0\,(\mathfrak{Q}); \qquad \mathfrak{L}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{Q})$$

(wegen der kürzesten Darstellung) kommt dann:

$$\mathfrak{R}_i^{\sigma_i} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}); \text{ oder } \mathfrak{P}_i^{\varrho_i \sigma_i} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}).$$

Da $\mathfrak{P}_i$ zugleich Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist, stimmt also $\mathfrak{P}_i$ für jedes i mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{Q}$ überein.

Es ist noch zu zeigen, daß bei *jeder reduzierten* Darstellung $\mathfrak{Q} = [\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_\lambda]$ die $\mathfrak{R}_i$ primär sind[22]). Dazu löse man die $\mathfrak{R}_i$ in ihre irreduziblen Ideale $\mathfrak{B}$ auf; in der so entstehenden *kürzesten* Darstellung $\mathfrak{Q} = [\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_\mu]$ ist dann jedes Ideal primär und besitzt nach dem eben Bewiesenen $\mathfrak{P}$ als zugehöriges Primideal. Dann gilt aber nach dem oben bewiesenen ersten Teil des Satzes das gleiche für jedes $\mathfrak{R}_i$, womit *Satz* VIII *vollständig bewiesen ist.*

Zusatz. Hieraus folgt noch, daß ein *Primideal notwendig irreduzibel* ist. Denn aus der reduzierten Darstellung $\mathfrak{P} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}]$ kommt nach Satz VIII: $\mathfrak{R} \equiv 0\,(\mathfrak{P})$; also wegen $\mathfrak{P} \equiv 0\,(\mathfrak{R})$ auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ und ebenso $\mathfrak{P} = \mathfrak{L}$. Die Irreduzibilität von $\mathfrak{P}$ ergibt sich auch direkt: denn aus $\mathfrak{P} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}]$ folgt: $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L} \equiv 0\,(\mathfrak{P})$; $\mathfrak{R} \not\equiv (\mathfrak{P})$; $\mathfrak{L} \not\equiv 0\,(\mathfrak{P})$ im Widerspruch zu der Definitionseigenschaft des Primideals.

Seien jetzt

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_\alpha] = [\bar{\mathfrak{Q}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{Q}}_\beta]$$

zwei reduzierte Darstellungen von $\mathfrak{M}$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären Idealen. Indem man die $\mathfrak{Q}$ in ihre irreduziblen Ideale $\mathfrak{B}$, die $\bar{\mathfrak{Q}}$ entsprechend in die irreduziblen Ideale $\mathfrak{D}$ auflöst, kommen zwei reduzierte Darstellungen für $\mathfrak{M}$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Idealen, bei denen nach Satz VII sowohl die Anzahl der Komponenten wie die zugehörigen Primideale übereinstimmen. Nach Satz VIII besitzen dabei alle bei einem festem $\mathfrak{Q}_i$ auftretenden irreduziblen Ideale $\mathfrak{B}$ *dasselbe zugehörige Primideal* $\mathfrak{P}_i$; während das zu $\mathfrak{Q}_k$ gehörige $\mathfrak{P}_k$ notwendig davon verschieden ist, da sonst nach Satz VIII keine Darstellung

[22]) Daß hier die reduzierte Darstellung wesentlich ist, zeigt das Beispiel der nicht-reduzierten Darstellung: $\mathfrak{Q} = [x^2, xy, y^\lambda] = [(x^2, xy, y^2, yz), (x, y^\lambda)]$, wo $\lambda \geqq 2$. Hier ist $(x^2, xy, y^2, yz) = [(x^2, y), (x, y^2, z)]$ nach dem oben Bewiesenen nicht primär; denn letztere Darstellung ist eine kürzeste durch primäre Ideale, aber die zugehörigen Primideale (x, y) und (x, y, z) sind verschieden. ($\mathfrak{Q}$ ist nach [19]) primär.)

durch größte primäre Ideale vorläge. Die Anzahl α der $\mathfrak{Q}$ ist also gleich der Anzahl der verschiedenen zugehörigen Primideale $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{B}$; diese verschiedenen $\mathfrak{P}$ bilden die zugehörigen Primideale der $\mathfrak{Q}$. Das gleiche gilt von den $\bar{\mathfrak{Q}}$ in bezug auf ihre Auflösung in die $\mathfrak{D}$. Aus Satz VII folgt also die *Anzahlgleichheit der* $\mathfrak{Q}$ *und* $\bar{\mathfrak{Q}}$, und das *Übereinstimmen ihrer zugehörigen Primideale.* Zugleich zeigt sich, daß die am Anfang des Paragraphen angegebene Zusammenfassung der irreduziblen Ideale zu größten primären darin besteht, alle mit demselben zugehörigen Primideal, und nur diese, zusammenzufassen. Satz VIII zeigt weiter die Irreduzibilitätseigenschaft der größten primären Ideale: Sie lassen keine reduzierte Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären zu.

Zusamenfassend ist bewiesen:

Satz IX. *Bei zwei reduzierten Darstellungen eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären Idealen stimmen die Anzahl der Komponenten und die zugehörigen Primideale, die alle voneinander verschieden sind, überein.* M. a. W.: *Jedem* $\mathfrak{Q}$ *läßt sich eineindeutig ein* $\bar{\mathfrak{Q}}$ *zuordnen, derart, daß eine Potenz von* $\mathfrak{Q}$ *durch* $\bar{\mathfrak{Q}}$ *teilbar ist, und umgekehrt* [23]). — *Die* $\mathfrak{Q}$ *und* $\bar{\mathfrak{Q}}$ *haben Irreduzibilitätseigenschaft in bezug auf die Zerlegung in größte primäre Ideale.*

Zusatz. Es sei bemerkt, daß Satz IX im wesentlichen erhalten bleibt, wenn man anstatt reduzierter nur *kürzeste* Darstellung voraussetzt. Ist dann etwa $\mathfrak{M} = [\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_i^* \ldots \mathfrak{Q}_\alpha]$ reduziert in bezug auf $\mathfrak{Q}_i^*$, und $\mathfrak{Q}_i^*$ ein echter Teiler von $\mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{L}_i$ das Komplement von $\mathfrak{Q}_i$, so kommt nach Hilfssatz IV: $\mathfrak{Q}_i = [\mathfrak{Q}_i^*, (\mathfrak{L}_i, \mathfrak{Q}_i)]$; und diese Darstellung ist reduziert in bezug auf $\mathfrak{Q}_i^*$. Nach Satz VIII, bei dessen Anwendung nötigenfalls $(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{Q}_i)$ durch einen echten Teiler zu ersetzen ist, ist also $\mathfrak{Q}_i^*$ primär und hat dasselbe zugehörige Primideal $\mathfrak{P}_i$ wie $\mathfrak{Q}_i$. Die Fortsetzung des Verfahrens zeigt, daß jeder solchen Darstellung eine reduzierte durch größte primäre Ideale zugeordnet werden kann, derart, daß die Anzahl der Komponenten und die zugehörigen Primideale übereinstimmen. *Es gilt also auch bei kürzester Darstellung, daß bei zwei verschiedenen Darstellungen die Anzahl der Komponenten und die zugehörigen Primideale übereinstimmen.*

Die derart *eindeutig* definierten zugehörigen, voneinander verschiedenen Primideale sollen kurz als „*die zugehörigen Primideale von* $\mathfrak{M}$" bezeichnet werden.

---

[23]) Ein Beispiel verschiedener Darstellungen ist das in [12]) zu Satz II gegebene: $(x^2, xy) = [(x), (x^2, \mu x + y)]$ für beliebiges μ. Da die zugehörigen Primideale $\mathfrak{P}_1 = (x)$; $\mathfrak{P}_2 = (x, y)$ voneinander verschieden sind, handelt es sich um größte primäre Ideale. — Für die Eindeutigkeit der „isolierten" größten primären Ideale vgl. § 7.

§ 6.

Eindeutige Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von relativprim-irreduziblen Idealen.

Definition V. *Ein Ideal* $\mathfrak{N}$ *heißt relativprim zu* $\mathfrak{S}$, *wenn aus* $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{S})$ *notwendig folgt*: $\mathfrak{T} \equiv 0\,(\mathfrak{S})$. *Ist sowohl* $\mathfrak{N}$ *zu* $\mathfrak{S}$, *wie* $\mathfrak{S}$ *zu* $\mathfrak{N}$ *relativprim, so heißen* $\mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{S}$ *gegenseitig relativprim*[24]). *Ein Ideal heißt relativprim-irreduzibel, wenn es sich nicht als kleinstes gemeinsames Vielfaches von gegenseitig relativprimen echten Teilern darstellen läßt.*

Nimmt man insbesondere anstatt $\mathfrak{T}$ den größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{T}_0$ aller $\mathfrak{T}$, für die $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{S})$, so wird auch $\mathfrak{T}_0\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{S})$ und $\mathfrak{S} \equiv 0\,(\mathfrak{T}_0)$. Es wird also $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{N}$ relativprim zu $\mathfrak{S}$; $\mathfrak{T}_0$ ein echter Teiler von $\mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{N}$ nicht relativprim zu $\mathfrak{S}$[25]).

Dem Eindeutigkeitsbeweis liegt zugrunde

Satz X. 1. *Ist* $\mathfrak{N}$ *relativprim zu den Idealen* $\mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_\lambda$, *so ist* $\mathfrak{N}$ *auch relativprim zu ihrem kleinsten gemeinsamen Vielfachen* $\mathfrak{S}$.

2. *Sind die Ideale* $\mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_\lambda$ *relativprim zu* $\mathfrak{N}$, *so ist auch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches* $\mathfrak{S}$ *relativprim zu* $\mathfrak{N}$.

3. *Ist* $\mathfrak{N}$ *relativprim zu* $\mathfrak{S}$ *und ist* $\mathfrak{S} = [\mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_\lambda]$ *eine reduzierte Darstellung für* $\mathfrak{S}$, *so ist* $\mathfrak{N}$ *auch relativprim zu jedem* $\mathfrak{S}_i$.

4. *Ist* $\mathfrak{S}$ *relativprim zu* $\mathfrak{N}$, *so ist auch jeder Teiler* $\mathfrak{S}_i$ *von* $\mathfrak{S}$ *relativprim zu* $\mathfrak{N}$.

1. Da aus $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{S})$ notwendig folgt: $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{S}_i)$, so wird nach Voraussetzung: $\mathfrak{T} \equiv 0\,(\mathfrak{S}_i)$ und damit $\mathfrak{T} \equiv 0\,(\mathfrak{S})$.

2. Es sei $\mathfrak{C}_1 = [\mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{S}_\lambda]$; $\mathfrak{C}_{12} = [\mathfrak{S}_3 \ldots \mathfrak{S}_\lambda]$; $\ldots$; $\mathfrak{C}_{12\ldots\lambda-1} = \mathfrak{S}_\lambda$ gesetzt. Aus $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{S} \equiv 0\,(\mathfrak{N})$ folgt dann $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{C}_1\cdot\mathfrak{S}_1 \equiv 0\,(\mathfrak{N})$; also nach Voraussetzung: $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{C}_1 \equiv 0\,(\mathfrak{N})$. Daraus folgt wieder: $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{C}_{12}\cdot\mathfrak{S}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{N})$; also nach Voraussetzung $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{C}_{12} \equiv 0\,(\mathfrak{N})$, und schließlich: $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{C}_{12\ldots\lambda-1} = \mathfrak{T}\cdot\mathfrak{S}_\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{N})$; also $\mathfrak{T} \equiv 0\,(\mathfrak{N})$.

3. Es bedeute $\mathfrak{C}_i$ das Komplement von $\mathfrak{S}_i$; aus $\mathfrak{T}_0\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{S}_i)$ folgt dann wegen $\mathfrak{C}_i\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{C}_i)$ auch $[\mathfrak{T}_0, \mathfrak{C}_i]\cdot\mathfrak{N} \equiv 0\,(\mathfrak{S})$.

Wäre nun $\mathfrak{T}_0$ ein echter Teiler von $\mathfrak{S}_i$, so wäre wegen der reduzierten Darstellung $\mathfrak{S} = [\mathfrak{S}_i, \mathfrak{C}_i]$ auch $[\mathfrak{T}_0, \mathfrak{C}_i]$ ein echter Teiler von $\mathfrak{S}$ gegen die Voraussetzung.

---

[24]) Die Bedingung des relativprim ist nicht symmetrisch. Z. B. ist $\mathfrak{N} = (x^2, y)$ relativprim zu $\mathfrak{S} = (x)$; aber $\mathfrak{S}$ ist nicht relativprim zu $\mathfrak{N}$, da $\mathfrak{S}^2 \equiv 0\,(\mathfrak{N})$, aber $\mathfrak{T} = \mathfrak{S} \not\equiv 0\,(\mathfrak{N})$ wird.

[25]) Dieses so definierte $\mathfrak{T}_0$ stimmt überein mit dem „Residualmodul" von Lasker; und in seiner Ausdehnung auf Zahlenmoduln statt Ideale mit dem „Quotient" zweier Moduln bei Dedekind. Lasker, a. a. O. S. 49, Dedekind (Zahlentheorie), S. 504.

4. Aus $\mathfrak{T}_0 \cdot \mathfrak{S}_i \equiv 0\,(\mathfrak{R})$, wo $\mathfrak{T}_0$ ein echter Teiler von $\mathfrak{R}$, folgt auch $\mathfrak{T}_0 \cdot \mathfrak{S} \equiv 0\,(\mathfrak{R})$; also wäre $\mathfrak{T}_0$ echter Teiler von $\mathfrak{R}$ gegen die Voraussetzung.

Definition V zeigt insbesondere, daß jedes Ideal relativprim zu dem aus *allen* Elementen von Σ bestehenden *Einheitsideal* $\mathfrak{O}$ wird[26]); die folgenden Sätze gelten aber nur für von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideale.

Aus dem eben bewiesenen Satz X ergibt sich zunächst

Hilfssatz V. *Jede Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von gegenseitig relativprimen, von $\mathfrak{O}$ verschiedenen Idealen ist reduziert.*

Sei $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \ldots \mathfrak{R}_\sigma] = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i]$ eine solche Darstellung. Nach Satz X, 2 ist dann auch $\mathfrak{L}_i$ relativprim zu $\mathfrak{R}_i$; $\mathfrak{R}_i$ kann also nicht in $\mathfrak{L}_i$ aufgehen; die Darstellung wird eine kürzeste. Denn aus $\mathfrak{L}_i \equiv 0\,(\mathfrak{R}_i)$, wo $\mathfrak{L}_i$ relativprim zu $\mathfrak{R}_i$, würde wegen $\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{L}_i \equiv 0\,(\mathfrak{R}_i)$ auch folgen: $\mathfrak{O} \equiv 0\,(\mathfrak{R}_i)$; also $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{O}$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Sei nun $\mathfrak{R}_i$ durch den echten Teiler $\mathfrak{R}_i^*$ ersetzbar, dann wird nach Hilfssatz II $\mathfrak{R}_i$ reduzibel und es kommt: $\mathfrak{R}_i = [\mathfrak{R}_i^*, (\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i)]$. Ersetzt man hier gegebenenfalls $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i)$ durch einen echten Teiler $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i)^*$, ebenso $\mathfrak{R}_i^*$ durch einen echten Teiler, so daß eine reduzierte Darstellung für $\mathfrak{R}_i$ entsteht, so zeigt Satz X, 3, daß $\mathfrak{L}_i$ auch relativprim zu $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i)^*$ wird, und dieses ist wegen der kürzesten Darstellung von $\mathfrak{O}$ verschieden. Da aber $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i)^*$ in $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i)$ und $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i)$ in $\mathfrak{L}_i$ aufgeht, ist damit ein Widerspruch nachgewiesen.

Aus Satz X ergibt sich ferner der den Zusammenhang mit den zugehörigen Primidealen vermittelnde

Satz XI. *Ist $\mathfrak{R}$ relativprim zu $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{O}$ verschieden, so ist kein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{R}$[27]) durch ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{S}$ teilbar. Findet umgekehrt keine solche Teilbarkeit statt, so ist $\mathfrak{R}$ relativprim zu $\mathfrak{S}$, und natürlich $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{O}$ verschieden.*

Seien

$$\mathfrak{R} = [\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_\alpha], \qquad \mathfrak{S} = [\mathfrak{Q}_1^* \ldots \mathfrak{Q}_\beta^*]$$

reduzierte Darstellungen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ durch größte primäre Ideale; $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_\alpha$, $\mathfrak{P}_1^* \ldots \mathfrak{P}_\beta^*$ die zugehörigen Primideale. Wir zeigen die Behauptung in der Form: Ist ein $\mathfrak{P}$ durch ein $\mathfrak{P}^*$ teilbar, so kann $\mathfrak{R}$ nicht relativprim zu $\mathfrak{S}$ sein, und umgekehrt.

Sei also $\mathfrak{P}_\mu \equiv 0\,(\mathfrak{P}_\nu^*)$ und folglich auch: $\mathfrak{Q}_\mu \equiv 0\,(\mathfrak{P}_\nu^*)$, woraus nach Definition von $\mathfrak{P}_\nu^*$ folgt: $\mathfrak{Q}_\mu^{\varrho_\nu} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}_\nu^*)$, also auch $\mathfrak{R}^{\varrho_\nu} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}_\nu^*)$. Es sei

---

[26]) $\mathfrak{O}$ spielt nur in bezug auf Teilbarkeit und kleinstes gemeinsames Vielfaches, nicht in bezug auf Produktbildung die Rolle der Einheit. Es wird etwa $\mathfrak{O} = (x)$ für den Bereich aller ganzzahligen Polynome von x ohne konstantes Glied; $\mathfrak{O} = (2)$ für den Bereich aller geraden Zahlen.

[27]) Definition der zugehörigen Primideale von $\mathfrak{R}$ in § 5, Schluß.

nun $\mathfrak{R}^r$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{R}$, die durch $\mathfrak{Q}_r^*$ teilbar ist. Für $r = 1$ wird $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{Q}_r^*$ teilbar; da aber nach Voraussetzung $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{O}$ verschieden, wird $\mathfrak{R}$ also nicht relativprim zu $\mathfrak{Q}_r^*$. Für $r \geqq 2$ wird $\mathfrak{R}^{r-1} \cdot \mathfrak{R} \equiv 0(\mathfrak{Q}_r^*)$, $\mathfrak{R}^{r-1} \not\equiv 0(\mathfrak{Q}_r^*)$, also $\mathfrak{R}$ nicht relativprim zu $\mathfrak{Q}_r^*$ [28]); und folglich ist in beiden Fällen nach Satz X, 3 auch $\mathfrak{R}$ nicht relativprim zu $\mathfrak{S}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{R}$ nicht relativprim zu $\mathfrak{S}$, so ist nach Satz X, 1 auch $\mathfrak{R}$ nicht relativprim zu mindestens einem $\mathfrak{Q}_r^*$. Es gilt also: $\mathfrak{T}_0 \cdot \mathfrak{R} \equiv 0(\mathfrak{Q}_r^*)$; $\mathfrak{T}_0 \not\equiv 0(\mathfrak{Q}_r^*)$, und daraus, da $\mathfrak{Q}_r^*$ primär ist: $\mathfrak{R}^r \equiv 0(\mathfrak{Q}_r^*)$, also auch $\mathfrak{Q}_1^r \ldots \mathfrak{Q}_a^r \equiv 0(\mathfrak{Q}_r^*)$. Daraus folgt aber für die zugehörigen Primideale: $\mathfrak{P}_1^{r\varrho_1} \ldots \mathfrak{P}_a^{r\varrho_a} \equiv 0(\mathfrak{P}_r^*)$; und nach der Eigenschaft der Primideale geht folglich $\mathfrak{P}_r^*$ in mindestens einem $\mathfrak{P}$ auf, womit *Satz* XI *bewiesen* ist.

Aus Satz X und XI ergibt sich nun die *Existenz* [29]) *und Eindeutigkeit der Zerlegung in relativprim-irreduzible Ideale* wie folgt:

Sei $\mathfrak{M} = [\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_a]$ eine reduzierte (oder wenigstens kürzeste) Darstellung von $\mathfrak{M}$ durch größte primäre Ideale; $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_a$ die zugehörigen Primideale. Wir fassen die $\mathfrak{P}$ derart in Gruppen zusammen, daß *kein Ideal einer Gruppe teilbar wird durch ein Ideal einer davon verschiedenen Gruppe, während die einzelne Gruppe sich nicht in zwei Teilgruppen spalten läßt, denen beiden diese Eigenschaft zukommt.* Um eine solche Gruppeneinteilung zu konstruieren, ist zu bemerken, daß nach Definition die einzelne Gruppe G neben jedem Ideal $\mathfrak{P}$ auch alle seine in $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_a$ vorkommenden Teiler und Vielfachen (d. h. durch $\mathfrak{P}$ teilbaren) enthalten muß. Seien etwa $\mathfrak{P}^{(i_1)}$ alle Vielfachen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_{j_1}^{(i_1)}$ alle Teiler von $\mathfrak{P}^{(i_1)}$, $\mathfrak{P}_{j_1}^{(i_1 i_2)}$ alle Vielfachen von $\mathfrak{P}_{j_1}^{(i_1)}$ usf.; allgemein $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_{\lambda-1}}^{(i_1 \ldots i_\lambda)}$ alle Vielfachen von $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_{\lambda-1}}^{(i_1 \ldots i_{\lambda-1})}$, $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_\lambda}^{(i_1 \ldots i_\lambda)}$ alle Teiler von $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_{\lambda-1}}^{(i_1 \ldots i_\lambda)}$. Da es sich im ganzen nur um endlich viele Ideale $\mathfrak{P}$ handelt, muß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen; d. h. kein von allen vorangehenden verschiedenes Ideal liefern. Der so gewonnene Inbegriff von Idealen $\mathfrak{P}$ bildet nun tatsächlich eine Gruppe G von den gewünschten Eigenschaften.

Denn nach Definition enthält G neben jedem $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_{\lambda-1}}^{(i_1 \ldots i_{\lambda-1})}$ auch alle Vielfachen $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_{\lambda-1}}^{(i_1 \ldots i_\lambda)}$, neben jedem $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_{\lambda-1}}^{(i_1 \ldots i_\lambda)}$ auch alle Teiler $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_\lambda}^{(i_1 \ldots i_\lambda)}$. Darunter sind aber auch alle Teiler der $\mathfrak{P}_{j_1 \ldots j_{\lambda-1}}^{(i_1 \ldots i_{\lambda-1})}$ enthalten, während

---

[28]) $\mathfrak{R}^0$ ist nicht definiert, da Σ die Einheit nicht zu enthalten braucht; daher mußte der Fall $r = 1$ vorweggenommen werden. $r = 0$ ist auch in dem Fall, wo Σ eine Einheit enthält, durch die Voraussetzung über $\mathfrak{S}$ ausgeschlossen.

[29]) Die Existenz der Zerlegung läßt sich auch direkt beweisen, in genauer Analogie mit der in § 2 nachgewiesenen Existenz der Zerlegung in endlich viele irreduzible Ideale.

die Vielfachen der $\mathfrak{P}^{(i_1\ldots i_\lambda)}_{j_1\ldots j_{\lambda-1}}$ selbst wieder $\mathfrak{P}^{(i_1\ldots i_\lambda)}_{j_1\ldots j_{\lambda-1}}$ sind. Die nicht in G enthaltenen Ideale können also weder Teiler noch Vielfache der in G enthaltenen sein. G erfüllt aber auch die Irreduzibilitätsbedingung. Denn liegt eine Einteilung in zwei Teilgruppen $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ vor, und enthält $G^{(1)}$ etwa $\mathfrak{P}^{(i_1\ldots i_\lambda)}_{j_1\ldots j_\lambda}$ $\left(\text{bzw. } \mathfrak{P}^{(i_1\ldots i_\lambda)}_{j_1\ldots j_{\lambda-1}}\right)$, so enthält es auch alle vorangehenden, da diese abwechselnd Vielfache und Teiler (bzw. Teiler und Vielfache) sind, also auch $\mathfrak{P}$ und damit die ganze Gruppe G. Verfährt man mit den nicht in G enthaltenen Idealen entsprechend, so kommt damit eine Gruppeneinteilung $G_1 \ldots G_\sigma$ aller $\mathfrak{P}$, der die gewünschten Eigenschaften zukommen. Eine solche *Gruppeneinteilung ist eindeutig;* denn sei $G_1' \ldots G_\tau'$ eine zweite Einteilung und $\mathfrak{P}^{(i_1\ldots i_\lambda)}_{j_1\ldots j_\lambda}$ $\left(\text{bzw. } \mathfrak{P}^{(i_1\ldots i_\lambda)}_{j_1\ldots j_{\lambda-1}}\right)$ ein Element von G_i', so enthält nach dem obigen G_i' die ganze Gruppe G und ist also wegen der Irreduzibilitätseigenschaft mit G identisch.

Bedeuten nun $\mathfrak{P}_{i\mu}$ (wo μ von 1 bis λ_i läuft), die in einer Gruppe G_i zusammengefaßten Ideale $\mathfrak{P}$, so sind, da die $\mathfrak{P}$ alle voneinander verschieden sind, die einer kürzesten Darstellung entsprechenden primären Ideale $\mathfrak{Q}_{i\mu}$ eindeutig bestimmt. Setzen wir

$$\mathfrak{R}_i = [\mathfrak{Q}_{i1} \ldots \mathfrak{Q}_{i\lambda_i}], \text{ so kommt } \mathfrak{M} = [\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_\sigma];$$

wir zeigen, daß dadurch eine *Zerlegung von $\mathfrak{M}$ in relativprim-irreduzible Ideale* erreicht ist. Zunächst ist zu bemerken, daß Satz XI anwendbar bleibt, auch wenn $\mathfrak{R}_i = [\mathfrak{Q}_{i1} \ldots \mathfrak{Q}_{i\lambda_i}]$ nur eine kürzeste Darstellung ist, da nach dem Zusatz zu Satz IX die zugehörigen Primideale dadurch schon eindeutig definiert sind. Da nun kein zugehöriges Primideal $\mathfrak{P}_{i\mu}$ von $\mathfrak{R}_i$ durch ein zugehöriges Primideal $\mathfrak{P}_{j\nu}$ von $\mathfrak{R}_j$ teilbar ist, und umgekehrt, sind nach Satz XI $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{R}_j$ gegenseitig relativprim; und jedes einzelne $\mathfrak{R}_i$ ist nach Satz XI wegen der Irreduzibilitätseigenschaft der Gruppe G_i relativprim-irreduzibel, da bei Reduzibilität stets von $\mathfrak{Q}$ verschiedene Ideale in Betracht kommen. Nach Hilfssatz V handelt es sich ferner um eine reduzierte Darstellung, auch wenn man ursprünglich nur von einer kürzesten Darstellung durch die $\mathfrak{Q}$ ausgegangen war. Umgekehrt führt nach Satz XI jede Zerlegung in relativprim-irreduzible Ideale auf die angegebene Gruppeneinteilung der $\mathfrak{P}_{i\mu}$.

Sei nun $\mathfrak{M} = [\overline{\mathfrak{R}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{R}}_\tau]$ eine *zweite Darstellung von $\mathfrak{M}$ durch relativprim-irreduzible Ideale,* die nach Hilfssatz V reduziert ist. Da dann, wie die Auflösung der $\overline{\mathfrak{R}}$ in größte primäre Ideale zeigt, die zugehörigen Primideale übereinstimmen, stimmen also auch die Gruppeneinteilungen dieser Primideale, deren Eindeutigkeit oben bewiesen, überein. Es wird somit $\tau = \sigma$; und die Bezeichnung läßt sich so wählen, daß

$\mathfrak{R}_i$, $\overline{\mathfrak{R}}_i$ zu derselben Gruppe gehören. Sei dann

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i] = [\overline{\mathfrak{R}}_i, \overline{\mathfrak{L}}_i]$$

die Darstellung durch Ideal und Komplement. Dann wird, da $\overline{\mathfrak{R}}_i$ derselben Gruppe zugeordnet ist wie $\mathfrak{R}_i$, nach Satz XI auch $\mathfrak{L}_i$ *relativprim zu* $\overline{\mathfrak{R}}_i$, und $\overline{\mathfrak{L}}_i$ *relativprim zu* $\mathfrak{R}_i$. Wegen

$$\mathfrak{R}_i \cdot \mathfrak{L}_i \equiv 0(\overline{\mathfrak{R}}_i), \qquad \overline{\mathfrak{R}}_i \cdot \overline{\mathfrak{L}}_i \equiv 0(\mathfrak{R}_i)$$

kommt somit

$$\mathfrak{R}_i \equiv 0(\overline{\mathfrak{R}}_i); \qquad \overline{\mathfrak{R}}_i \equiv 0(\mathfrak{R}_i); \qquad \mathfrak{R}_i = \overline{\mathfrak{R}}_i.$$

Damit ist bewiesen:

Satz XII. ***Jedes Ideal läßt sich eindeutig darstellen als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen gegenseitig relativprimen und relativprim-irreduziblen Idealen.***

§ 7.

Eindeutigkeit der isolierten Ideale.

Definition VI. ***Ist die kürzeste Darstellung*** $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}]$ ***reduziert in bezug auf*** $\mathfrak{L}$, ***so heißt*** $\mathfrak{R}$ ***isoliertes Ideal, wenn kein zugehöriges Primideal von*** $\mathfrak{R}$ ***in einem zugehörigen Primideal von*** $\mathfrak{L}$ ***aufgeht***, m. a. W., ***wenn*** $\mathfrak{L}$ ***relativ prim zu*** $\mathfrak{R}$ ***ist.***

Danach erfüllt die Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}]$ die Bedingungen der Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i]$ in Hilfssatz V, und mit Hilfssatz V ist bewiesen:

Hilfssatz VI. ***Ist*** $\mathfrak{R}$ ***isoliertes Ideal der in bezug auf*** $\mathfrak{L}$ ***reduzierten, kürzesten Darstellung*** $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}]$, ***so ist die Darstellung auch reduziert in bezug auf*** $\mathfrak{R}$.

Da es sich also bei isolierten Idealen um reduzierte Darstellung handelt, ergänzen sich die bei der Zerlegung von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ in *irreduzible* Ideale auftretenden zugehörigen Primideale zu den eindeutig bestimmten, bei der entsprechenden Zerlegung von $\mathfrak{M}$ auftretenden zugehörigen Primidealen.

Es geht somit kein zu der Zerlegung in irreduzible Ideale gehöriges Primideal von $\mathfrak{R}$ in den übrigen, zu der entsprechenden Zerlegung von $\mathfrak{M}$ gehörigen Primidealen auf. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, und tritt $\mathfrak{R}$ in mindestens einer in bezug auf $\mathfrak{R}$ reduzierten Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}]$, also auch in einer reduzierten Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}^*]$ auf, so ist $\mathfrak{R}$ nach Definition VI isoliert. Daraus ergibt sich die von dem speziellen Komplement $\mathfrak{L}$ unabhängige

Definition VIa. ***$\mathfrak{R}$ heißt isoliertes Ideal, wenn die zu der Zerlegung in irreduzible Ideale gehörigen Primideale von $\mathfrak{R}$ nicht in den***

übrigen, zu der entsprechenden Zerlegung von $\mathfrak{M}$ gehörigen Primidealen aufgehen, und wenn $\mathfrak{R}$ in mindestens einer in bezug auf $\mathfrak{R}$ reduzierten Darstellung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}]$ *auftritt*[30]).

Seien nun

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{R}, \mathfrak{L}] = [\overline{\mathfrak{R}}, \overline{\mathfrak{L}}]$$

zwei Darstellungen von $\mathfrak{M}$ durch isolierte Ideale $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ und Komplemente $\mathfrak{L}$ und $\overline{\mathfrak{L}}$; derart, daß die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ übereinstimmen. Ersetzt man $\mathfrak{L}$ und $\overline{\mathfrak{L}}$ durch solche Teiler $\mathfrak{L}^*$ und $\overline{\mathfrak{L}}^*$, daß die Darstellungen reduziert werden, so stimmen also auch die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{L}^*$ und $\overline{\mathfrak{L}}^*$ überein; nach Satz XI wird also $\mathfrak{L}^*$ relativprim zu $\overline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\mathfrak{L}}^*$ relativprim zu $\mathfrak{R}$. Wegen

$$\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L}^* \equiv 0(\overline{\mathfrak{R}}); \qquad \overline{\mathfrak{R}}\overline{\mathfrak{L}}^* \equiv 0(\mathfrak{R})$$

kommt somit

$$\mathfrak{R} \equiv 0(\overline{\mathfrak{R}}); \qquad \overline{\mathfrak{R}} \equiv 0(\mathfrak{R}); \qquad \mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}};$$

isolierte Ideale sind also *eindeutig* durch die zugehörigen Primideale bestimmt. Dies ergibt insbesondere eine Verschärfung der Sätze VII und IX über die Zerlegung in irreduzible bzw. größte primäre Ideale, wobei nach dem Zusatz zu Satz IX nur kürzeste Darstellung vorausgesetzt zu werden braucht. Zusammenfassend kommt:

Satz XIII. *Bei jeder kürzesten Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen bzw. größten primären Idealen sind die isolierten irreduziblen bzw. größten primären Ideale eindeutig bestimmt; die Vieldeutigkeit bezieht sich nur auf die nicht-isolierten irreduziblen bzw. größten primären Ideale*[31]). *Allgemein sind die isolierten Ideale eindeutig durch die zugehörigen Primideale bestimmt.*

Sind in einer solchen kürzesten Darstellung durch irreduzible, bzw. größte primäre Ideale die Ideale $\mathfrak{B}_i$ bzw. $\mathfrak{Q}_j$ nicht-isoliert, so sind nach Definition die Komplemente $\mathfrak{A}_i$ bzw. $\mathfrak{L}_j$ durch $\mathfrak{P}_i$ bzw. $\mathfrak{P}_j$ teilbar. Es kommt also

$$\mathfrak{A}_i^{\varrho_i} \equiv 0(\mathfrak{B}_i) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{L}_j^{\varrho_j} \equiv 0(\mathfrak{Q}_j).$$

Aus dem Erfülltsein dieser Relationen folgt umgekehrt, daß $\mathfrak{P}_i$ bzw. $\mathfrak{P}_j$ in mindestens einem zugehörigen Primideal des Komplements, also nach

---

[30]) Würde man gewöhnliche zugehörige Primideale (§ 5 Schluß) einführen, so wäre als besondere Bedingung zuzufügen, daß diejenigen von $\mathfrak{L}$ alle von denen von $\mathfrak{R}$ verschieden sind. Nach der Definition VI a braucht also die Darstellung nicht mehr reduziert in bezug auf das Komplement vorausgesetzt zu werden.

[31]) Dieser Satz ist für Ideale aus Polynomen im Fall der Zerlegung in größte primäre schon ohne Beweis von Macaulay mitgeteilt; seine Definition der isolierten und nicht-isolierten (imbedded) primären Ideale kann als irrationale Fassung der unten mitgeteilten angesehen werden.

Zusatz zu Satz IX auch in einem zugehörigen Primideal des eine reduzierte Darstellung in bezug auf $\mathfrak{L}_j^*$ vermittelnden Teilers $\mathfrak{L}_j^*$ von $\mathfrak{L}_j$, aufgeht; $\mathfrak{B}_i$ bzw. $\mathfrak{Q}_j$ sind also nicht-isoliert. Insbesondere sind irreduzible Ideale $\mathfrak{B}_i$, deren zugehöriges Primideal öfter als einmal bei der Zerlegung von $\mathfrak{M}$ auftritt, stets nicht-isoliert. *Nicht-isolierte primäre Ideale sind also auch dadurch charakterisiert, daß eine Potenz jedes Komplements durch sie teilbar wird*; *isolierte primäre dadurch, daß dies nicht erfüllt sein kann.*

§ 8.

Eindeutige Darstellung eines Ideals als Produkt von teilerfremd-irreduziblen Idealen.

Besitzt der zugrunde gelegte Ringbereich Σ eine Einheit, d. h. ein Element ε, derart, daß $\varepsilon \cdot a = a$ wird für jedes Element aus Σ [32]), so lassen sich die teilerfremden Ideale definieren durch

Definition VIII. *Zwei Ideale $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ heißen teilerfremd, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler gleich dem aus allen Elementen von Σ bestehenden Einheitsideal $\mathfrak{O} = (\varepsilon)$ ist. Ein Ideal heißt teilerfremd-irreduzibel, wenn es sich nicht als kleinstes gemeinsames Vielfaches von paarweise teilerfremden Idealen darstellen läßt.*

Es sei bemerkt, daß zwei teilerfremde Ideale immer gegenseitig relativprim sind. Nach Definition gibt es nämlich zwei Elemente: $r \equiv 0(\mathfrak{R})$, $s \equiv 0(\mathfrak{S})$ derart, daß $\varepsilon = r + s$ wird. Aus $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{R} \equiv 0(\mathfrak{S})$ folgt aber: $\mathfrak{T} \cdot r \equiv 0(\mathfrak{S})$, also $\mathfrak{T} \cdot \varepsilon = \mathfrak{T} \equiv 0(\mathfrak{S})$; und entsprechend kommt aus $\overline{\mathfrak{T}} \cdot \mathfrak{S} \equiv 0(\mathfrak{R})$ auch $\overline{\mathfrak{T}} \equiv 0(\mathfrak{R})$[33]). Aus Hilfssatz V folgt also, daß jede Darstellung durch paarweise teilerfremde Ideale zugleich *reduziert* ist.

Dem Eindeutigkeitsbeweise liegt zugrunde der Satz X entsprechende

Satz XIV. *Ist $\mathfrak{R}$ teilerfremd zu jedem der Ideale $\mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_\lambda$, so ist $\mathfrak{R}$ auch teilerfremd zu $\mathfrak{S} = [\mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_\lambda]$. Umgekehrt folgt aus der Teilerfremdheit von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ auch die von $\mathfrak{R}$ mit jedem $\mathfrak{S}_j$. Ist $\mathfrak{R} = [\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_\mu]$ und jedes $\mathfrak{R}_i$ teilerfremd zu jedem $\mathfrak{S}_j$, so sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ teilerfremd; auch hier gilt die Umkehrung.*

Ist nämlich $\mathfrak{R}$ teilerfremd zu jedem $\mathfrak{S}_j$, so existieren Elemente s_j, derart, daß

$$s_j \equiv 0(\mathfrak{S}_j); \qquad s_j \equiv \varepsilon(\mathfrak{R})$$

[32]) Σ kann bekanntlich wegen der Kommutativität der Multiplikation nicht mehr als *eine* Einheit besitzen, denn für irgend zwei Einheiten, ε_1 und ε_2, gilt: $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 = \varepsilon_1$.

[33]) Die Umkehrung gilt dagegen nicht; z. B. sind die Ideale $\mathfrak{R} = (x)$, $\mathfrak{S} = (y)$ gegenseitig relativprim, aber nicht teilerfremd.

wird. Folglich wird

$$s_1 \cdot s_2 \ldots s_\lambda \equiv 0(\mathfrak{S}); \qquad s_1 \cdot s_2 \ldots s_\lambda \equiv \varepsilon(\mathfrak{R}), \qquad (\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) = (\varepsilon):$$

Da aber $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ durch jedes $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}_j)$ teilbar ist, gilt auch die Umkehrung. Die mehrfache Anwendung des Schlusses ergibt den zweiten Teil der Behauptung. Ist nämlich $\mathfrak{R}_i$ für festes i teilerfremd zu $\mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_\lambda$, so wird $\mathfrak{R}_i$ teilerfremd zu $\mathfrak{S}$. Gilt dies für jedes i, so wird, da der Begriff der Teilerfremdheit ein gegenseitiger ist, $\mathfrak{S}$ teilerfremd zu $\mathfrak{R}$. Umgekehrt folgt aus der Teilerfremdheit von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ die Teilerfremdheit von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{R}_i$, und folglich von $\mathfrak{R}_i$ zu $\mathfrak{S}_j$.

Der Beweis für Existenz und Eindeutigkeit[34]) der Zerlegung in teilerfremd-irreduzible Ideale kommt, wie der entsprechende Beweis bei den relativprimen Idealen, auf eine *eindeutige* Gruppeneinteilung heraus. Da aber die relativprim-irreduziblen Ideale $\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_\sigma$ von $\mathfrak{M}$ nach Satz XII *eindeutig* definiert sind, ist hier ein Zurückgehen auf die zugehörigen Primideale unnötig.

Wir fassen die eindeutig definierten relativprim-irreduziblen Ideale $\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_\sigma$ von $\mathfrak{M}$ derart in Gruppen zusammen, daß *jedes Ideal einer Gruppe teilerfremd zu jedem Ideal einer davon verschiedenen Gruppe wird, während die einzelne Gruppe sich nicht in zwei Teilgruppen spalten läßt, derart daß jedes Ideal einer Teilgruppe teilerfremd zu jedem Ideal der andern Teilgruppe wird.* Eine solche Gruppeneinteilung ergibt sich wie folgt: Nach Definition muß die einzelne Gruppe G neben jedem Ideal $\mathfrak{R}$ auch alle zu $\mathfrak{R}$ nicht teilerfremden Ideale enthalten. Seien diese etwa gegeben durch $\mathfrak{R}_{i_1}$; zu diesen seien $\mathfrak{R}_{i_1 i_2}$ nicht teilerfremd; sei allgemein $\mathfrak{R}_{i_1 \ldots i_\lambda}$ nicht teilerfremd zu $\mathfrak{R}_{i_1 \ldots i_{\lambda-1}}$. Da es sich im ganzen nur um endlich viele Ideale handelt, muß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen, d. h. keine von allen vorangehenden verschiedenen Ideale liefern; der so gewonnene Inbegriff von Idealen bildet eine Gruppe G von den gewünschten Eigenschaften. Denn alle nicht in G enthaltenen Ideale sind nach Konstruktion von G teilerfremd zu allen in G enthaltenen. Liegt ferner eine Einteilung in zwei Teilgruppen $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ vor; und sei etwa $\mathfrak{R}_{i_1 \ldots i_\lambda}$ Element von $G^{(1)}$. Da die Eigenschaft der Teilerfremdheit eine gegenseitige ist, muß $G^{(1)}$ dann auch $\mathfrak{R}_{i_1 \ldots i_{\lambda-1}}, \ldots \mathfrak{R}_{i_1}$, also auch $\mathfrak{R}$ und folglich die ganze Gruppe G enthalten, womit die Irreduzibilität bewiesen ist. Verfährt man mit den nicht in G enthaltenen Gruppen

[34]) Die Existenz der Zerlegung läßt sich wieder in Analogie zu § 2 direkt beweisen; auch der Eindeutigkeitsbeweis läßt sich direkt führen (vgl. das in der Einleitung über Schmeidler und Noether-Schmeidler Gesagte). Der hier gegebene Beweis gibt zugleich Einblick in die Struktur der teilerfremd-irreduziblen Ideale.

entsprechend, so kommt somit eine Gruppeneinteilung $G_1 \ldots G_r$ aller $\mathfrak{R}$. Diese Gruppeneinteilung ist *eindeutig*; denn sei $G_1' \ldots G_{r'}'$ eine zweite Einteilung und $\mathfrak{R}_{i_1 \ldots i_\lambda}$ ein Element von G_i'. Dann enthält G_i' auch $\mathfrak{R}$ und folglich G_1 und kann wegen der Irreduzibilitätsbedingung keine von G_1 verschiedenen Elemente enthalten; es wird G_i' gleich G_1.

Es sei jetzt $\mathfrak{T}_i$ das kleinste gemeinsame Vielfache der in einer Gruppe G_i vereinigten Ideale $\mathfrak{R}$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{M} = [\mathfrak{T}_1 \ldots \mathfrak{T}_r]$ *eine Darstellung von* $\mathfrak{M}$ *durch teilerfremd-irreduzible Ideale wird.* Vorerst zeigt die Auflösung der $\mathfrak{T}$ in die $\mathfrak{R}$, daß $[\mathfrak{T}_1 \ldots \mathfrak{T}_r]$ wirklich $\mathfrak{M}$ darstellt. Nach Satz XIV sind ferner die $\mathfrak{T}$ paarweise teilerfremd, und jedes $\mathfrak{T}$ ist teilerfremd-irreduzibel. Damit ist also die *Existenz* einer solchen Darstellung bewiesen.

Zum Eindeutigkeitsbeweis sei $\mathfrak{M} = [\overline{\mathfrak{T}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{T}}_{\bar r}]$ eine zweite derartige Darstellung. Löst man die $\overline{\mathfrak{T}}$ in ihre relativprim-irreduziblen Ideale $\mathfrak{R}$ auf, so sind die bei verschiedenen $\overline{\mathfrak{T}}$ auftretenden $\mathfrak{R}$ nach Satz XIV zueinander teilerfremd, also auch gegenseitig relativprim; sie stimmen also mit den eindeutig definierten relativprim-irreduziblen Idealen $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{M}$ überein. Die $\overline{\mathfrak{T}}_i$ erzeugen ferner nach Satz XIV eine Gruppeneinteilung G_i' der $\mathfrak{R}$ mit den angegebenen Eigenschaften. Da aber diese Gruppeneinteilung *eindeutig* ist und jedes $\overline{\mathfrak{T}}_i$ durch die Gruppe $G_i' = G_i$ *eindeutig* bestimmt ist, wird $\overline{\mathfrak{T}}_i = \mathfrak{T}_i$, womit die *Eindeutigkeit bewiesen* ist.

Für paarweise teilerfremde Ideale wird ferner das *kleinste gemeinsame Vielfache gleich dem Produkt.*

Denn nach Satz XIV ist für $\mathfrak{M} = [\mathfrak{T}_1 \ldots \mathfrak{T}_r]$ auch das Komplement $\mathfrak{L}_i$ teilerfremd zu $\mathfrak{T}_i$; es gibt also Elemente

$$t_i \equiv 0(\mathfrak{T}_i); \qquad l_i \equiv 0(\mathfrak{L}_i); \qquad \varepsilon = t_i + l_i.$$

Aus $f \equiv 0(\mathfrak{T}_i)$; $f \equiv 0(\mathfrak{L}_i)$ folgt also wegen

$$f = f\varepsilon = ft_i + fl_i \quad \text{auch} \quad f \equiv 0(\mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{T}_i).$$

Da umgekehrt $\mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{T}_i$ durch $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{T}_i]$ teilbar, kommt $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{T}_i] = \mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{T}_i$; und durch Fortsetzung des Verfahrens auf $\mathfrak{L}_i$ schließlich:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{T}_1 \ldots \mathfrak{T}_r] = \mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{T}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{T}_r.$$

Damit ist bewiesen:

Satz XV. *Jedes Ideal läßt sich eindeutig darstellen als Produkt von endlich vielen paarweise teilerfremden und teilerfremd-irreduziblen Idealen.*

§ 9.

Ausdehnung der Untersuchung auf Moduln. Anzahlgleichheit der Komponenten bei Zerlegungen in irreduzible Moduln.

Wir zeigen jetzt, daß der Inhalt der drei ersten Paragraphen, der sich auf *irreduzible*, nicht auf primäre und Prim-Ideale bezieht, unter geringeren Voraussetzungen bestehen bleibt. Diese Paragraphen benutzen nämlich das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht und beziehen sich nur auf die Eigenschaft der Ideale, Moduln zu sein, bleiben also erhalten für Moduln in bezug auf nicht-kommutative Bereiche, die jetzt zu definieren sind. Der Definition der Moduln ist ein *Doppelbereich* (Σ, T) zugrunde zu legen von folgenden Eigenschaften:

Σ ist ein abstrakt-definierter nicht-kommutativer Ring, d. h. Σ ist ein System von Elementen $a, b, c, \ldots$, für die zwei Verknüpfungsarten definiert sind, die Ringaddition ($\#$) und die Ringmultiplikation ($\times$), die den in § 1 aufgestellten Gesetzen genügen, mit Ausnahme des kommutativen Gesetzes 4. der Ringmultiplikation.

T ist ein System von Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, für das in Verbindung mit Σ ebenfalls zwei Verknüpfungen definiert sind, die *Addition*, die aus je zwei Elementen α, β eindeutig ein drittes $\alpha + \beta$ erzeugt; die *Multiplikation eines Elementes α aus T mit einem Element c aus Σ*, die eindeutig ein Element $c \cdot \alpha$ aus T erzeugt[35]).

Für diese Verknüpfungen gelten die folgenden Gesetze:

1. Das assoziative Gesetz der Addition: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
2. Das kommutative Gesetz der Addition: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
3. Das Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion: es gibt in T ein und nur ein Element ξ, das die Gleichung $\alpha + \xi = \beta$ befriedigt (man bezeichnet $\xi = \beta - \alpha$).
4. Das assoziative Gesetz der Multiplikation: $a \cdot (b \cdot \gamma) = (a \times b) \cdot \gamma$.
5. Das distributive Gesetz: $(a \# b) \cdot \gamma = a \cdot \gamma + b \cdot \gamma$; $c \cdot (\alpha + \beta) = c \cdot \alpha + c \cdot \beta$.

Aus diesen Bedingungen folgt bekanntlich die Existenz des Nullelements, und die Gültigkeit des distributiven Gesetzes auch für die Verknüpfung von Subtraktion und Multiplikation:

$$(a \dot{-} b) \cdot \gamma = a \cdot \gamma - b \cdot \gamma; \qquad c \cdot (\alpha - \beta) = c \cdot \alpha - c \cdot \beta;$$

wo $(\dot{-})$ die Subtraktion in Σ bedeutet. Enthält Σ eine Einheit ε, so soll $\varepsilon \cdot \alpha = \alpha$ gelten für jedes Element α aus T.

---

[35]) Es handelt sich also hier um eine „rechtsseitige" Multiplikation, einen „rechtsseitigen" Bereich T und folglich um „rechtsseitige" Moduln und Ideale. Würde man für T eine linksseitige Multiplikation $\alpha \cdot c$ zugrunde legen, so käme eine entsprechende Theorie der linksseitigen Moduln und Ideale; M enthält neben α auch $\alpha \cdot c$. Das assoziative Gesetz wäre hier von der Form $(\gamma \cdot b) \cdot a = \gamma \cdot (b \times a)$.

Unter einem *Modul* M in (Σ, T) sei ein System von Elementen aus T verstanden, das den beiden Bedingungen genügt:

1. *M enthält neben α auch $c \cdot \alpha$, wo c ein beliebiges Element aus Σ ist.*
2. *M enthält neben α und β auch die Differenz $\alpha - \beta$;* also neben α auch $n\alpha$ für jede ganze Zahl n[36]).

Nach dieser Definition *bildet T selbst einen Modul in (Σ, T)*. Fällt insbesondere der Bereich T und die dort festgelegten Verknüpfungen mit dem Bereich Σ und den dort geltenden Verknüpfungen zusammen, so geht der Modul M über in ein (rechtsseitiges) Ideal $\mathfrak{M}$ in Σ. Wird Σ noch als kommutativ angenommen, so entsteht der gewöhnliche Idealbegriff, der sich somit als Spezialfall des Modulbegriffs ergibt[37]).

Für Moduln bleiben alle Definitionen des § 1 erhalten: So bedeutet $\alpha \equiv 0\,(M)$ bzw. $N \equiv 0\,(M)$, daß α bzw. jedes Element von N Element von M ist; anders ausgedrückt, α bzw. N ist durch M teilbar. M wird ein echter Teiler von N, wenn M von N verschiedene Elemente enthält; aus $N \equiv 0\,(M)$, $M \equiv 0\,(N)$ folgt $M = N$. Auch die Definition des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen bleibt wörtlich erhalten. Enthält der Modul M insbesondere eine endliche Anzahl von Elementen $\alpha_1 \ldots \alpha_\varrho$, derart, daß $M = (\alpha_1 \ldots \alpha_\varrho)$, d. h. $\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_\varrho\alpha_\varrho + n_1\alpha_1 + \ldots + n_\varrho\alpha_\varrho$ wird für jedes $\alpha \equiv 0\,(M)$, wobei die c_i Größen aus Σ, die n_i ganze Zahlen sind, so heißt M ein *endlicher Modul*, $\alpha_1 \ldots \alpha_\varrho$ eine *Modulbasis*.

Wir legen nun im folgenden, analog wie in § 1, nur *solche Bereiche (Σ, T) zugrunde, die die Endlichkeitsbedingung erfüllen: Jeder Modul in (Σ, T) ist ein endlicher, besitzt also eine Modulbasis.*

Dann gilt für diesen Bereich (Σ, T) Satz I von der endlichen Kette auch für Moduln, wie der dortige Beweis zeigt, und damit sind alle Voraussetzungen für die §§ 2 und 3 erfüllt. Es läßt sich Definition I und Hilfssatz I über kürzeste und reduzierte Darstellung direkt übertragen; ebenso

---

36) Die ganzen Zahlen sind wieder als abkürzende Zeichen, nicht als Ringelemente zu betrachten.

37) Das einfachste Beispiel eines Moduls bildet der Modul aus ganzzahligen Linearformen; Σ besteht hier aus allen ganzen rationalen Zahlen, T aus allen ganzzahligen Linearformen. Ein etwas allgemeinerer Modul entsteht, wenn man in Σ und T ganze algebraische Zahlen statt der ganzrationalen Zahlen nimmt, oder etwa alle geraden Zahlen. Betrachtet man statt der Linearformen jeweils den Komplex aller Koeffizienten als *ein* Element, so sind die Verknüpfungen in Σ und T tatsächlich verschiedene. Ideale in nicht-kommutativen Ringbereichen aus Polynomen bilden den Gegenstand der gemeinsamen Arbeit Noether-Schmeidler. Von Idealen in weiteren speziellen nichtkommutativen Bereichen handeln die Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen von Hurwitz (Berlin, Springer 1919) und die dort zitierten Arbeiten von Du Pasquier.

Satz II über die Darstellbarkeit jedes Moduls als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen Moduln, wobei Hilfssatz II zeigt, daß jede solche kürzeste Darstellung zugleich reduziert ist. Weiter bleibt Satz III erhalten, der die Reduzibilität eines Moduls durch Eigenschaften seines Komplements ausdrückt; und daraus folgt Hilfssatz III und schließlich Satz IV, der die *Anzahlgleichheit der Komponenten bei zwei verschiedenen kürzesten Darstellungen eines Moduls als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Moduln* aussagt. Satz IV ergibt noch den Hilfssatz IV als Umkehrung von Hilfssatz I über reduzierte Darstellung.

Zusatz. Dieselbe Überlegung zeigt, daß alle diese Sätze und Definitionen erhalten bleiben, wenn man für zweiseitige Bereiche T, d. h. solche, die sowohl rechts- wie linksseitig sind, unter Modul durchweg einen *zweiseitigen Modul* versteht, d. h. einen solchen, der neben α auch $c \cdot \alpha$ und $\alpha \cdot c$ enthält; neben α und β auch $\alpha - \beta$.

Während all diese Sätze sich nur auf den Begriff der *Teilbarkeit* und des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* stützen, beruhen die weiteren Eindeutigkeitssätze wesentlich auf dem *Produktbegriff* und lassen deshalb eine direkte Übertragung nicht zu. So läßt sich die Definition des primären und Prim-Ideals nicht auf Moduln übertragen, da das Produkt zweier Größen aus T nicht definiert ist. Die formal mögliche Übertragung auf nicht-kommutative Ringe verliert aber ihren Sinn, da hier die Existenz des zugehörigen Primideals sich nicht beweisen läßt[38]) und auch der Beweis, daß ein irreduzibles Ideal primär ist, versagt. Diese beiden Tatsachen bilden aber die Grundlage der folgenden Eindeutigkeitssätze. — Dagegen lassen sich, wenn der nichtkommutative Ring eine Einheit besitzt, die teilerfremden und teilerfremd-irreduziblen Ideale definieren, und die zum Beweise von Satz II benutzten Überlegungen lassen erkennen, daß jedes Ideal sich als kleinstes gemeinsames Vielfaches von *endlich vielen* paarweise teilerfremden und teilerfremd-irreduziblen Idealen darstellen läßt[39]).

Schließlich sei noch ein hinreichendes Kriterium dafür erwähnt, daß in (Σ, T) die Endlichkeitsbedingung erfüllt ist: *Enthält Σ eine Einheit*

---

[38]) Es folgt nämlich aus

$$p_1^{\lambda_1} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}); \quad p_2^{\lambda_2} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}) \quad \text{hier nicht:} \quad (p_1 - p_2)^{\lambda_1 + \lambda_2} \equiv 0\,(\mathfrak{Q})$$

und ebenso folgt aus

$$(a \cdot b)^{\lambda} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}) \quad \text{nicht:} \quad a^{\lambda} \cdot b^{\lambda} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}).$$

Dadurch läßt sich also $\mathfrak{P}$ weder als Ideal nachweisen, noch kommt ihm die Eigenschaft der Primideale zu. — Für zweiseitige Ideale läßt $\mathfrak{P}$ sich zwar als Ideal, nicht aber als Primideal nachweisen.

[39]) Für spezielle, „vollständig reduzible" Ideale lassen sich auch hier Eindeutigkeitssätze aufstellen; vgl. gemeinsame Arbeit Noether-Schmeidler.

und erfüllt die Endlichkeitsbedingung, und ist T selbst ein endlicher Modul in (Σ, T), so ist jeder Modul in (Σ, T) ein endlicher.

Aus der Existenz der Einheit in Σ folgt nämlich für

$$\mathfrak{M} = (f_1 \dots f_\varrho); \qquad f = \bar{b}_1 f_1 + \dots + \bar{b}_\varrho f_\varrho + n_1 f_1 + \dots + n_\varrho f_\varrho,$$

wo $\bar{b}_i$ Elemente aus Σ, n_i ganze Zahlen sind, auch eine Darstellung: $f = b_1 f_1 + \dots + b_\varrho f_\varrho$, wo b_i Elemente aus Σ sind. Denn wegen $f_i = \varepsilon f_i$ wird $n_i f_i = n_i \varepsilon f_i$, und da $n_i \varepsilon = (\varepsilon + \dots + \varepsilon)$ zu Σ gehört, wird $b_i = \bar{b}_i + n_i \varepsilon$ ein Element aus Σ. Die Voraussetzung über T sagt nun aus, daß jedes Element α aus T eine Darstellung zuläßt:

$$\alpha = \bar{a}_1 \tau_1 + \dots + \bar{a}_k \tau_k + n_1 \tau_1 + \dots + n_k \tau_k,$$

und folglich: $$\alpha = a_1 \tau_1 + \dots + a_k \tau_k,$$

wo die zweite Darstellung wegen $\varepsilon \tau_i = \tau_i$ sich wie oben aus der ersten ergibt.

Durchlaufen nun die α die Elemente eines Moduls M aus (Σ, T), so durchlaufen die Koeffizienten a_k von τ_k ein Ideal $\mathfrak{M}_k$ aus Σ; nach dem Obigen wird also für jedes $a_k \equiv 0\ (\mathfrak{M}_k)$ auch $a_k = b_1 a_k^{(1)} + \dots + b_\varrho a_k^{(\varrho)}$. Bezeichnet $\alpha^{(i)}$ ein Element aus M, für das der Koeffizient von τ_k gleich $a_k^{(i)}$ wird, so wird $\alpha - b_1 \alpha^{(1)} \dots - b_\varrho \alpha^{(\varrho)}$ ein zu M gehöriges Element, das nur von $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ abhängt. Auf die Gesamtheit dieser τ_k nicht mehr enthaltenden Elemente, die einen Modul M' bilden, läßt sich das Verfahren wiederholen, so daß durch endlich oftmalige Wiederholung die *Behauptung bewiesen* ist.

§ 10.

Spezialfall des Polynombereichs.

1. Der zugrunde gelegte Ringbereich Σ bestehe aus allen Polynomen von $x_1 \dots x_n$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten, für den nach dem Hilbertschen Theorem von der Modulbasis (Ann. 36) die Endlichkeitsbedingung erfüllt ist. Es handelt sich um den *Zusammenhang unserer Sätze mit den bekannten Sätzen der Eliminations- und Modultheorie.*

Dieser Zusammenhang wird hergestellt durch den folgenden Spezialfall eines bekannten Hilbertschen Satzes[40]):

Verschwindet f für jedes (endliche) Wertsystem von $x_1 \dots x_n$, das Nullstelle aller Polynome eines Primideals $\mathfrak{P}$ (Nullstelle von $\mathfrak{P}$) ist, so ist f durch $\mathfrak{P}$ teilbar. M. a. W.: Ein Primideal $\mathfrak{P}$ besteht aus der *Gesamtheit* der Polynome, die in seinen Nullstellen verschwinden[41]).

[40]) Über die vollen Invariantensysteme. Math. Ann. **42** (1893), § 3, S. 313.

[41]) Dieser Spezialfall läßt sich, wie Lasker [Math. Ann. **60** (1905), S. 607] gezeigt hat, im Fall homogener Formen auch direkt beweisen, und es folgt dann umgekehrt hieraus wieder der Hilbertsche Satz (im homogenen und inhomogenen Fall),

Verschwindet somit ein Produkt $f \cdot g$ für alle Nullstellen von $\mathfrak{P}$, so verschwindet mindestens ein Faktor; die Nullstellen bilden ein *irreduzibles algebraisches Gebilde*. Legt man umgekehrt diese Definition des irreduziblen Gebildes zugrunde, so zeigt sich, daß die Gesamtheit der in einem irreduziblen Gebilde verschwindenden Polynome ein Primideal bilden; Primideal und irreduzibles Gebilde entsprechen sich somit eineindeutig. Wegen $\mathfrak{Q} \equiv 0\,(\mathfrak{P})$, $\mathfrak{P}^{\varrho} \equiv 0\,(\mathfrak{Q})$ stimmen ferner die Nullstellen eines primären Ideals mit denen seines zugehörigen Primideals überein[42]). Die Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären Idealen ergibt also eine Auflösung aller Nullstellen des Ideals in irreduzible Gebilde; und wie Lasker gezeigt hat, gilt auch das Umgekehrte. *Der Eindeutigkeitsnachweis der zugehörigen Primideale entspricht also hier dem Fundamentalsatz der Eliminationstheorie von der eindeutigen Zerlegbarkeit eines algebraischen Gebildes in irreduzible Gebilde;* kann für spezielle Polynombereiche, wo keine eindeutige Produktdarstellung der Polynome durch irreduzible Polynome des Bereichs und folglich auch keine Eliminationstheorie besteht, als Äquivalent dieses Satzes der Eliminationstheorie gelten.

Die den isolierten primären Idealen entsprechenden irreduziblen Gebilde sind genau die bei der „Minimalresolvente"[43]) auftretenden; denn die Nullstellen jedes nicht-isolierten größten primären Ideals sind zugleich Nullstellen mindestens eines isolierten; nämlich eines solchen, dessen zugehöriges Primideal durch das des nicht-isolierten Ideals teilbar ist. Die Eindeutigkeit der isolierten primären Ideale ergibt also in den Exponenten neue invariante Multiplizitätszahlen. Auch die Eindeutigkeitssätze bei der Auflösung der primären Ideale in irreduzible können als Ergänzung der Eliminationstheorie im Sinn der Multiplizität angesehen werden.

---

den wir so aussprechen können: Verschwindet ein Ideal $\mathfrak{R}$ in allen Nullstellen von $\mathfrak{M}$, so ist eine Potenz von $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{M}$ teilbar. Dieser Satz, und ebenso der Spezialfall, gilt aber nur, wenn der Wertevorrat der x *algebraisch abgeschlossen* ist, kann daher aus unsern Sätzen allein nicht folgen, sondern muß die Wurzelexistenz benutzen; etwa an der Stelle, daß ein Ideal, dessen Nullstellen nur aus $x_1 = 0 \ldots x_n = 0$ bestehen, alle Potenzprodukte der x von einer gewissen Dimension an enthält. Der übrige Beweis läßt sich unter Benutzung unserer Sätze gegenüber Lasker etwas vereinfachen. Lasker muß nämlich auch zum Nachweis der Zerlegung eines Ideals in größte primäre den Hilbertschen Satz heranziehen.

[42]) Diese Eigenschaft eines primären Ideals, ein irreduzibles Gebilde zu besitzen, nimmt Macaulay (vgl. Einleitung) zur Definition, während Lasker nur den Begriff der Mannigfaltigkeit eines Gebildes in die Definition aufnimmt, im übrigen abstrakt definiert. Die nur für $x_1 = 0 \ldots x_n = 0$ verschwindenden primären Ideale nehmen bei Lasker eine Sonderstellung ein.

[43]) Vgl. etwa J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen (Leipzig, Teubner, 1903), S. 235.

Nach diesen Bemerkungen lassen sich die verschiedenen Zerlegungen in ihrem Verhalten zu den algebraischen Gebilden deuten. Den paarweise teilerfremden Idealen entsprechen solche Gebilde, die keine gemeinsame Nullstelle besitzen; bei den gegenseitig relativprimen Idealen ist kein irreduzibles Gebilde des einen Ideals zugleich gemeinsame Nullstelle; die größten primären Ideale verschwinden nur in irreduzibeln Gebilden, die alle voneinander verschieden sind; bei der Zerlegung in irreduzible Ideale können dieselben irreduziblen Gebilde auch mehrfach auftreten.

Bemerkt sei noch, daß an Stelle des allgemeinen Polynombereichs auch der Bereich aller homogenen Formen zugrunde gelegt werden kann, denn man überzeugt sich leicht, daß auch bei den dort geltenden Verknüpfungen — die Addition ist nur für Formen gleicher Dimensionen definiert — die allgemeinen Sätze erhalten bleiben[44]).

Ein einfachstes Beispiel der vier verschiedenen Zerlegungen — für das die Formeln unten folgen — ist nach dem obigen etwa gegeben durch eine Gerade und zwei dazu windschiefe, sich schneidende Gerade, von denen eine einen vom Schnittpunkt verschiedenen Punkt in höherer Multiplizität enthält. Der Zerlegung in teilerfremd-irreduzible Ideale entspricht die Zerlegung in die Gerade und das dazu windschiefe Gebilde; dies Gebilde zerfällt bei der Zerlegung in relativprim-irreduzible Ideale in die beiden Geraden; der Zerlegung in größte primäre Ideale entspricht eine Ablösung des Punktes höherer Multiplizität, während die Zerlegung in irreduzible Ideale eine Auflösung dieses Punktes bedingt.

Nimmt man diesen Punkt zum Anfangspunkt, die durchlaufende Gerade zur y-Achse, die diese schneidende Gerade der x-Achse parallel, die dazu windschiefe Gerade der z-Achse parallel, so wird eine solche Konfiguration etwa dargestellt durch die folgenden *irreduziblen Ideale*[45]):

$$\mathfrak{B}_1 = (x-1, y); \quad \mathfrak{B}_2 = (y-1, z); \quad \mathfrak{B}_3 = (x, z); \quad \mathfrak{B}_4 = (x^3, y, z);$$
$$\mathfrak{B}_5 = (x^2, y^2, z).$$

Die *zugehörigen Primideale* werden:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{B}_2; \quad \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{B}_3; \quad \mathfrak{P}_4 = \mathfrak{P}_5 = (x, y, z).$$

Die *größten primären Ideale* werden:

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{B}_2; \quad \mathfrak{Q}_3 = \mathfrak{B}_3; \quad \mathfrak{Q}_4 = [\mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5] = (x^3, y^2, x^2y, z).$$

Die *relativprim-irreduziblen Ideale* werden:

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{Q}_1; \quad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{Q}_2; \quad \mathfrak{R}_3 = [\mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_4] = (x^3, x^2y, xy^2, z).$$

---

[44]) Daß hier aber im Falle der Mehrdeutigkeit neben homogenen auch inhomogene Zerlegungen existieren können, zeigt das Beispiel:

$$(x^2, xy, y^2) = [(x^2, y); (y^2, x)] = [(xy, x^2, y^2, x+y^2); (xy, x^2, y^2, y+x^2)].$$

[45]) Davon sind die drei ersten als Primideale irreduzibel; $\mathfrak{B}_4$ da es nur die Teiler (x^2, y, z) und (x, y, z) besitzt; $\mathfrak{B}_5$ da *jeder* Teiler das Polynom xy enthält.

Die *teilerfremd-irreduzibeln Ideale* werden:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_1; \qquad \mathfrak{S}_2 = [\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3] = ((y-1)x^3, (y-1)x^2y, (y-1)xy^2, z).$$

Daraus kommt das *Gesamtideal*:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2] = \mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{S}_2$$
$$= ((x-1)(y-1)x^3, (y-1)x^2y, (y-1)xy^2, (x-1)z, y(y-1)x^3, yz),$$

wobei $\qquad 1 = -(y-1)x^3 + (y-1)(x^3-1) + y,$

$$(y-1)(x^3-1) + y \equiv 0(\mathfrak{S}_1); \qquad -(y-1)x^3 \equiv 0(\mathfrak{S}_2).$$

Dabei sind die Ideale $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ isolierte, also auch bei den Zerlegungen in irreduzible und größte primäre Ideale eindeutig bestimmt. Die Ideale $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{B}_5$ bzw. $\mathfrak{Q}_4$ sind nicht-isolierte; sie sind nicht eindeutig bestimmt, sondern etwa ersetzbar durch $\mathfrak{D}_4 = (x^3, y + \lambda x^2, z)$, $\mathfrak{D}_5 = (x^2 + \mu xy, y^2, z)$; ebenso ist $\mathfrak{Q}_4$ ersetzbar durch

$$\overline{\mathfrak{Q}}_4 = (x^3, x^2y, y^2 + \lambda xy, z).$$

2. Ebenso wie der allgemeine (und der ganzzahlige) Polynombereich erfüllt auch jeder *endliche Integritätsbereich aus Polynomen* — wie das Hilbertsche Theorem von der Modulbasis zeigt — die Endlichkeitsbedingung[46]), wobei die Koeffizienten einem beliebigen Körper zugewiesen werden können. Wir geben noch ein Beispiel für den *Bereich aller geraden Polynome*, als dem einfachsten Bereich, wo wegen $x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$ keine eindeutige Produktdarstellung der Polynome durch irreduzible Polynome des Bereichs existiert. Es handelt sich um die gleiche Konfiguration wie in dem obigen Beispiel, die jetzt gegeben wird durch die *irreduziblen Ideale*:

$$\mathfrak{B}_1 = (x^2 - 1, xy, y^2, yz); \qquad \mathfrak{B}_2 = (y^2 - 1, xz, yz, z^2);$$
$$\mathfrak{B}_3 = (x^2, xy, xz, yz, z^2); \qquad \mathfrak{B}_4 = (x^4, xy, y^2, xz, yz, z^2);$$
$$\mathfrak{B}_5 = (x^2, y^2, xz, yz, z^2).$$

Die *zugehörigen Primideale* werden:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{B}_2; \quad \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{B}_3; \quad \mathfrak{P}_4 = \mathfrak{P}_5 = (x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2).$$

Daß $\mathfrak{P}_1$ Primideal wird, folgt daraus, daß jedes Polynom des Bereichs von der Form wird:

$$f \equiv \varphi(z^2) + xz\,\psi(z^2)\,(\mathfrak{P}_1).$$

Sei also

$$f_1 \equiv \varphi_1(z^2) + xz\,\psi_1(z^2); \qquad f_2 \equiv \varphi_2(z^2) + xz\,\psi_2(z^2),$$

---

[46]) Ist umgekehrt für einen Polynombereich die Endlichkeitsbedingung erfüllt, und läßt jedes Polynom mindestens eine Darstellung zu, wo die Multiplikatoren von geringerem Grad in x sind, so ist der Bereich ein endlicher Integritätsbereich.

so folgt aus $f_1 \cdot f_2 \equiv 0(\mathfrak{P}_1)$ das Bestehen der Gleichungen:

$$\varphi_1 \varphi_2 + z^2 \psi_1 \psi_2 = 0; \qquad \varphi_2 \psi_1 + \varphi_1 \psi_2 = 0$$

und daraus $f_1 \equiv 0(\mathfrak{P}_1)$ oder $f_2 \equiv 0(\mathfrak{P}_1)$.

Genau so zeigt sich, daß $\mathfrak{P}_2$ Primideal wird; $\mathfrak{P}_3$ wird Primideal, da jedes Polynom des Bereichs mod $\mathfrak{P}_3$ einem Polynom von y^2 kongruent wird; $\mathfrak{P}_4$ besteht aus allen Polynomen des Bereichs. Es werden also auch $\mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ als Primideale irreduzibel; $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{B}_5$ besitzen aber je nur den einzigen echten Teiler $\mathfrak{P}_4$, sind also notwendig irreduzibel.

Aus den irreduziblen Idealen ergeben sich die *größten primären*:

$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{Q}_3 = \mathfrak{B}_3$; $\mathfrak{Q}_4 = [\mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5] = (x^4, x^3 y, y^2, xz, yz, z^2)$;

die *relativprim-irreduziblen Ideale*:

$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{Q}_1$; $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{Q}_2$; $\mathfrak{R}_3 = [\mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_4] = (x^4, x^3 y, x^2 y^2, x y^3, xz, yz, z^2)$,

die *teilerfremd-irreduziblen Ideale*:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_1; \qquad \mathfrak{S}_2 = [\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3]$$
$$= ((y^2-1)x^4, (y^2-1)x^3 y, (y^2-1)x^2 y^2, (y^2-1)x y^3, xz, yz, z^2).$$

Es wird wie im ersten Beispiel:

$$[\mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5] = [\mathfrak{D}_4, \mathfrak{D}_5];$$

wo $\mathfrak{D}_4 = (x^4, xy + \lambda x^2, \ldots)$; $\quad \mathfrak{D}_5 = (x^2 + \mu x y, \ldots) \quad \lambda \cdot \mu \neq 1$;

$$[\mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_4] = [\mathfrak{Q}_3, \overline{\mathfrak{Q}}_4]; \quad \text{wo} \quad \overline{\mathfrak{Q}}_4 = (x^4, x^3 y, y^2 + \lambda x y, \ldots).$$

Die übrigen irreduziblen bzw. größten primären Ideale $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ sind als isolierte Ideale eindeutig bestimmt.

§ 11.

Beispiele aus der Zahlentheorie und der Theorie der Differentialausdrücke.

1. Der zugrunde gelegte Bereich Σ bestehe aus allen *geraden, ganzen rationalen Zahlen*. Σ läßt sich also eineindeutig dem Bereich aller ganzen rationalen Zahlen zuordnen, indem man jeder Zahl $2a$ aus Σ die Zahl a entsprechen läßt. Daraus folgt sofort, daß jedes Ideal in Σ ein Hauptideal $(2a)$ ist, wobei in der Basisdarstellung $2c = n \cdot 2a$ für jedes Element $2c$ des Ideals die ungeraden n nur Abkürzungen für die endlichen Summen bedeuten.

Die *Primideale* des Bereichs sind gegeben durch $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{O} = (2)$ und $\mathfrak{P} = (2p)$, wo p eine ungerade Primzahl bedeutet; es ist also jedes Primideal durch $\mathfrak{P}_0$, aber durch kein weiteres Primideal teilbar. Die *primären Ideale* sind gegeben durch $\mathfrak{Q}_{\varrho_0} = (2 \cdot 2^{\varrho_0})$ und $\mathfrak{Q}_\varrho = (2p^\varrho)$; sie sind zugleich *irreduzible Ideale*, und nach dem über die Primideale Gesagten sind je zwei zu verschiedenen ungeraden Primzahlen gehörige gegen-

seitig relativprim, aber kein $\mathfrak{Q}$ ist zu irgendeinem $\mathfrak{Q}_{\varrho_0}$ relativprim[47]), die $\mathfrak{Q}_{\varrho_0}$ sind also die einzigen nicht-isolierten primären Ideale. Der eindeutigen Zerlegung von a in Primzahlpotenzen entspricht die *eindeutige* Darstellung des Ideals $(2a)$ durch größte primäre, zugleich irreduzible Ideale:

$$(2a) = [(2 \cdot 2^{\varrho_0}),\ \ (2p_1)^{\varrho_1},\ \ \ldots,\ \ (2p_\alpha)^{\varrho_\alpha}];$$

es sind also hier im Gegensatz zu den Beispielen aus dem Polynombereich auch die *nicht-isolierten* größten primären Ideale *eindeutig* bestimmt. Für $\varrho_0 = 0$ handelt es sich zugleich um eine Darstellung durch gegenseitig relativprime Ideale, während für $\varrho_0 > 0$ das Ideal relativprim-irreduzibel ist.

Während also im Bereich aller ganzen Zahlen die vier verschiedenen Zerlegungen zusammenfallen, ist dies hier nur der Fall für die beiden Zerlegungen in größte primäre und irreduzible einerseits, und bei $\varrho_0 > 0$ für teilerfremd-irreduzible (jedes Ideal ist teilerfremd-irreduzibel, da der Bereich keine Einheit besitzt) und relativprim-irreduzible andererseits, während bei $\varrho_0 = 0$ die teilerfremd-irreduziblen und relativprim-irreduziblen Zerlegungen voneinander verschieden werden. Zugleich bietet sich hier schon ein Beispiel dafür, daß ein Primideal durch ein anderes teilbar sein kann, ohne damit identisch zu sein; allgemeiner dafür, daß *aus der Teilbarkeit nicht die Produktdarstellung folgt*. Das letztere — eine Folge davon, daß der Bereich keine Einheit enthält — ist auch der Grund dafür, daß keine eindeutige Produktdarstellung der Zahlen des Bereichs durch irreduzible Zahlen des Bereichs existiert, obwohl jedes Ideal ein Hauptideal wird; die Einführung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen erweist sich also hier als notwendig. Es sei noch bemerkt, daß die Verhältnisse genau die *gleichen* bleiben, wenn statt aller geraden Zahlen alle durch eine *feste Primzahl oder Primzahlpotenz teilbaren Zahlen* zugrunde gelegt werden.

Dagegen werden auch noch *irreduzible und primäre Ideale verschieden*, wenn Σ aus *allen durch eine zusammengesetzte Zahl* $g = \mathfrak{p}_1^{\sigma_1} \ldots \mathfrak{p}_\nu^{\sigma_\nu}$ *teilbaren Zahlen* besteht. Es wird wieder jedes Ideal ein Hauptideal $(g \cdot a)$, und die *Primideale* sind wieder gegeben durch $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{O} = (g)$; $\mathfrak{P} = (g \cdot p)$, wo p eine von den in g aufgehenden Primzahlen $\mathfrak{p}$ verschiedene Primzahl bedeutet. Dagegen sind die *irreduziblen Ideale* gegeben durch $\mathfrak{B}_{\lambda_i} = (g \cdot \mathfrak{p}_i^{\lambda_i})$; $\mathfrak{B}_\varrho = (g \cdot p^\varrho)$; die *primären Ideale* durch $\mathfrak{Q}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho$ und durch die von den irreduziblen verschiedenen $\mathfrak{Q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} = (g \cdot \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{p}_\nu^{\lambda_\nu})$, wobei die $\mathfrak{B}_{\lambda_i}$ und $\mathfrak{Q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ alle dasselbe zugehörige Primideal $\mathfrak{P}_0 = (g)$ besitzen. Auch hier besteht Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Ideale, und folglich

---

[47]) In der Tat folgt aus: $2b \cdot 2p_1^{\varrho_1} \equiv 0\,(2p_2^{\varrho_2})$ für ungerade $p_1 \neq p_2$ stets: $2b \equiv 0\,(2p_2^{\varrho_2})$; aus $2b \cdot 2p^\varrho \equiv 0\,(2 \cdot 2^{\varrho_0})$ aber nur $2b \equiv 2 \cdot 2^{\varrho_0 - 1}\,(2 \cdot 2^{\varrho_0})$.

auch für die Zerlegung in größte primäre Ideale, es sind also wieder auch die nicht-isolierten Ideale eindeutig bestimmt.

2. Ein Beispiel eines *nicht-kommutativen Ringbereichs* bietet die in der Arbeit Noether-Schmeidler behandelte Idealtheorie in nicht-kommutativen Polynombereichen. Es handelt sich insbesondere um „vollständig-reduzible" Ideale, d. h. solche, bei denen die Komponenten der Zerlegung paarweise teilerfremd sind und keine echten Teiler besitzen; die Komponenten sind also a fortiori irreduzibel. Es ergibt sich somit in Ergänzung der dort bewiesenen Isomorphie nach § 9 noch die *Anzahlgleichheit der Komponenten* bei zwei verschiedenen Zerlegungen. Damit ist für die als Spezialfall der Arbeit sich ergebende Zerlegung der Systeme partieller oder gewöhnlicher linearer Differentialausdrücke ein Resultat gewonnen, das selbst in dem bekannten Fall eines gewöhnlichen linearen Differentialausdrucks nicht bemerkt gewesen zu sein scheint.

Zugleich liefert das System T aller Restklassen eines festen Ideals $\mathfrak{M}$ zusammen mit dem nicht-kommutativen Polynombereich Σ einen Doppelbereich (Σ, T), wo T Moduleigenschaft in bezug auf Σ hat. Denn die Differenz zweier Restklassen ist wieder eine Restklasse, und ebenso das Produkt einer Restklasse mit einem beliebigen Polynom, während das Produkt zweier Restklassen nicht existiert (a. a. O. § 3). Die dort als „Untergruppen" bezeichneten Systeme von Restklassen bilden somit Beispiele von Moduln in Doppelbereichen (Σ, T), wo der zugrunde gelegte Ringbereich Σ nicht-kommutativ ist.

§ 12.

Beispiel aus der Elementarteilertheorie.

Es handelt sich um eine durch die allgemeinen Entwicklungen bedingte Auffassung der Elementarteilertheorie, die aber selbst als *bekannt* vorausgesetzt wird.

Sei Σ der Bereich aller ganzzahligen Matrizen aus n^2 Elementen, für die Addition und Multiplikation in dem für Matrizen gebräuchlichen Sinn definiert sei. Σ wird also ein *nicht-kommutativer Ringbereich*; die Ideale sind somit im allgemeinen einseitig, die zweiseitigen nur als Spezialfall darin enthalten [48]).

Wir zeigen zuerst, daß *jedes Ideal* ein *Hauptideal* wird. Dazu ordnen

---

[48]) Die Idealtheorie dieser Bereiche bildet den Gegenstand der Arbeiten von Du Pasquier: Zahlentheorie der Tettarionen, Dissertation Zürich, Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. Zürich, **51** (1906). Zur Theorie der Tettarionenideale, ibid., **52** (1907). Der Inhalt der zweiten Arbeit ist der Nachweis, daß jedes Ideal ein Hauptideal wird.

wir (bei rechtsseitigen Idealen) jeder Matrix $A = (a_{ik})$ einen Modul

$$\mathsf{A} = (a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n, \dots, a_{n1}\xi_1 + \dots + a_{nn}\xi_n)$$

aus ganzzahligen Linearformen zu. Umgekehrt entspricht diesem Modul jede Matrix, die eine Basis von A liefert, also neben A auch UA, wo U unimodular ist. Allgemeiner entspricht dem Produkt PA ein Modul B, der Vielfaches von A wird. Eine einzelne Linearform aus A wird durch solche P gegeben, die nur eine von Null verschiedene Zeile enthalten.

Seien nun $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots$ alle Elemente eines Ideals $\mathfrak{M}$; $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_r, \dots$ die ihnen zugeordneten Moduln, A deren größter gemeinsamer Teiler und UA die allgemeinste, diesem Modul A zugeordnete Matrix. Jeder einzelnen Linearform aus A entspricht dann nach der Definition des größten gemeinsamen Teilers eine Matrix $P_1 A_{i_1} + \dots + P_s A_{i_s}$, wo nach dem obigen die P nur eine von Null verschiedene Zeile besitzen. Daraus folgt, daß auch die einer Basis von A entsprechende Matrix A eine solche Darstellung, jetzt mit allgemeinem P, zuläßt und folglich ein Element aus $\mathfrak{M}$ wird. Da ferner jeder Modul A_i durch A teilbar ist, wird jede Matrix A_i durch A teilbar; *A und allgemein UA bildet eine Basis von $\mathfrak{M}$*. Handelt es sich um linksseitige Ideale, so sind entsprechend die Spalten jeder Matrix als Basis eines Moduls zu betrachten; jedes Ideal wird ein Hauptideal, für das neben A auch AV eine Basis wird, unter V eine beliebige unimodulare Matrix verstanden.

Wir legen nun im folgenden zum Zusammenhang mit der Elementarteilertheorie *zweiseitige Ideale* zugrunde, bei denen also insbesondere neben A auch PAQ zum Ideal gehört. Dann ist die allgemeinste Basis eines solchen Ideals nach dem obigen gegeben durch UAV, wo U und V unimodular sind. Die Basiselemente erschöpfen also eine *Klasse äquivalenter Matrizen*[49]), und es besteht eineindeutige Beziehung zwischen Ideal und Klasse, folglich auch zwischen Ideal und Elementarteilersystem $(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$ der Klasse, wo die a_i bekanntlich nicht-negative ganze Zahlen sind, von denen jede in der folgenden aufgeht. Die in der durch die Elementarteiler bedingten Normalform auftretende Matrix der Klasse läßt sich somit als spezielle Basis des Ideals auffassen; aus der Teilbarkeit der Ideale, bzw. Klassen folgt die der Elementarteiler, und umgekehrt.

Nun hat aber Du Pasquier a. a. O. § 11 gezeigt, daß bei jedem zweiseitigen Ideal der Rang n ist und alle Elementarteiler übereinstimmen. Um den Fall allgemeiner Elementarteiler betrachten zu können, müssen wir daher nicht von den Idealen, sondern direkt von den zweiseitigen Klassen ausgehen (die ebenfalls durch große deutsche Buchstaben bezeichnet

---

[49]) Den Basiselementen der einseitigen Ideale entsprechen Rechts- bzw. Linksklassen.

werden sollen). Eine Klasse $\mathfrak{A} = UAV$ ist dabei also durch eine andere $\mathfrak{B}$ teilbar, wenn $A = PBQ$ wird.

Allgemein gilt: *Das kleinste gemeinsame Vielfache (der größte gemeinsame Teiler) zweier Klassen wird erhalten durch Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (des größten gemeinsamen Teilers) der entsprechenden Elementarteilersysteme*[30]. Denn seien $(a_1 | a_2 | \ldots a_n)$; $(b_1 | b_2 | \ldots b_n)$; $(c_1 | c_2 | \ldots c_n)$, wo $c_i = [a_i, b_i]$, bzw. die Elementarteilersysteme von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}^*$, und sei $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$. Dann ist $\mathfrak{C}^*$ durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, also durch $\mathfrak{C}$ teilbar, umgekehrt sind die Elementarteiler von $\mathfrak{C}$ durch die von $\mathfrak{C}^*$ teilbar, also ist $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}^*$ teilbar und somit $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^*$. Entsprechend ergibt sich der Beweis für den größten gemeinsamen Teiler,

Der eindeutigen Darstellung der Elementarteiler a_i als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Primzahlpotenzen entspricht somit eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Klassen $\mathfrak{Q}$, deren Elementarteiler gegeben sind durch die Potenzen *einer* Primzahl, in Zeichen

$$\mathfrak{Q} \sim (p^{r_1} | p^{r_2} | \ldots p^{r_\varrho} | 0 | \ldots | 0); \qquad r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_\varrho.$$

Ist insbesondere der Rang ϱ gleich n, so hat man hier eine Zerlegung in teilerfremde und teilerfremd-irreduzible Klassen, die trotz des nichtkommutativen Bereichs eindeutig ist.

Die Klassen $\mathfrak{Q}$ lassen sich weiter zerlegen in Klassen, die dem Elementarteilersystem ensprechen:

$$\mathfrak{B}_1 \sim (p^{r_1} | \ldots p^{r_1}); \quad \mathfrak{B}_2 \sim (1 | p^{r_2} | \ldots p^{r_2}); \quad \ldots; \quad \mathfrak{B}_\varrho \sim (1 | \ldots 1 | p^{r_\varrho} | \ldots p^{r_\varrho});$$
$$\mathfrak{B}_{\varrho+1} \sim (1 | \ldots 1 | 0 | \ldots 0),$$

wo in $\mathfrak{B}_\nu$ jeweils $(\nu - 1)$-mal die Zahl 1 auftritt. Ist dabei etwa $r_1 = r_2 = \ldots = r_\mu = 0$, so werden $\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_\mu$ gleich der Einheitsklasse und sind folglich bei der Zerlegung wegzulassen; das gleiche gilt für $\mathfrak{B}_{\varrho+1}$, wenn $\varrho = n$ ist. Ist ferner etwa $r_\nu = r_{\nu+1} = \ldots = r_{\nu+\lambda}$, so werden $\mathfrak{B}_{\nu+1}, \ldots \mathfrak{B}_{\nu+\lambda}$ echte Teiler von $\mathfrak{B}_\nu$, sind also gleichfalls auszuscheiden. Bezeichnen $\mathfrak{B}_{i_1} \ldots \mathfrak{B}_{i_k}$ die übrigbleibenden, die jetzt eine kürzeste Darstellung ergeben, so wird $\mathfrak{Q} = [\mathfrak{B}_{i_1} \ldots \mathfrak{B}_{i_k}]$ *die eindeutige Zerlegung von* $\mathfrak{Q}$ *in irreduzible Klassen*. Sei nämlich $\mathfrak{B}_\nu \sim (1 | \ldots 1 | p^{r_\nu} | \ldots p^{r_\nu})$ darstellbar als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $\mathfrak{C} \sim (1 | \ldots 1 | p^{s_1} | \ldots p^{s_\lambda})$ und $\mathfrak{D} \sim (1 | \ldots 1 | p^{t_1} | \ldots p^{t_\mu})$: dann muß im Elementarteilersystem von $\mathfrak{C}$

[30]) In der Arbeit: Zur Theorie der Moduln, Math. Ann. 52 (1899), S. 1 definiert E. Steinitz das kleinste gemeinsame Vielfache (den größten gemeinsamen Teiler) von Klassen durch kleinste gemeinsame Vielfache und größte gemeinsame Teiler der Elementarsysteme. Unabhängig davon findet sich das kleinste gemeinsame Vielfache von Klassen als „Kongruenzkomposition" bei H. Brandt, Komposition der binären quadratischen Formen relativ einer Grundform, J. f. M. 150 (1919), S. 1.

und $\mathfrak{D}$ an den ersten $(\nu - 1)$ Stellen die Zahl 1 stehen; an ν-ter Stelle muß der Exponent s_1 oder t_1, etwa s_1, gleich r_ν werden. Da aber $r_\nu = s_1 \leqq s_2 \leqq s_\lambda \leqq r_\nu$ wird, so kommt $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_\nu$, also ist $\mathfrak{B}_\nu$ *irreduzibel*[51]). Dasselbe gilt für $\mathfrak{B}_{\varrho+1}$, wo p durch 0 zu ersetzen ist. Jede dieser irreduziblen Klassen gibt aber, wie die Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zeigt, einen bestimmten Exponenten, und die Stelle, wo dieser Exponent im Elementarteilersystem von $\mathfrak{Q}$, bzw. $\mathfrak{A}$ zum erstenmal auftritt, während $\mathfrak{B}_{\varrho+1}$ den Rang angibt. Da diese Zahlen durch das Elementarteilersystem von $\mathfrak{Q}$, bzw. $\mathfrak{A}$ eindeutig festgelegt sind, und da die Beziehung zwischen Elementarteilern und Klasse eineindeutig ist, ist somit die Zerlegung von $\mathfrak{Q}$, und ebenso die einer beliebigen Klasse, in irrreduzible Klassen, *eindeutig*. Zusammenfassend läßt sich sagen: *Jede zweiseitige Klasse $\mathfrak{A}$ aus ganzzahligen Matrizen von beschränkter Elementenzahl läßt sich eindeutig darstellen als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen zweiseitigen Klassen. Jede irreduzible Klasse repräsentiert dabei einen festen Primteiler des Elementarteilersystems von $\mathfrak{A}$, einen zugehörigen Exponenten und die Stelle, wo dieser Exponent zum erstenmal auftritt. Die dem Teiler* 0 *entsprechende irreduzible Klasse gibt den Rang von $\mathfrak{A}$ an.*

---

[51]) Dagegen sind die $\mathfrak{B}$ noch in einseitige Klassen reduzibel; hier besteht keine eindeutige Beziehung mehr zwischen Elementarteilern und Klasse, und damit auch keine eindeutige Zerlegung in irreduzible einseitige Klassen. Das zeigt etwa das folgende mir von H. Brandt angegebene Beispiel der Zerlegung in rechtsseitige Klassen (wo die Klassen durch eine Basismatrix dargestellt sind, bzw. durch den entsprechenden Modul):

$$\mathfrak{B} = [\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2] = [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2]; \qquad \mathfrak{B} \sim \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{C}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{C}_2 \sim \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{D}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{D}_2 \sim \begin{pmatrix} p & 0 \\ (p-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat besitzen die Moduln $(\xi, p\eta)$; $(p\xi, \eta)$; $(p\xi, (p-1)\xi + \eta)$ jeweils als echten Teiler nur den Modul (ξ, η), sind also irreduzibel und sind ferner voneinander verschieden.

Erlangen, Oktober 1920.

(Eingegangen am 16. 10. 1920.)

Ein neues Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen.

Von

Bernhard von Ludwig in Berlin.

Hinsichtlich der Potenzsummen $s_\lambda = \sum_{k=1}^{n} x_k^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ beliebiger n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ weiß man seit Newton, daß die n ersten derselben ein Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden, d. h., daß sich jede rationale symmetrische Funktion dieser Größen durch $s_1, s_2, \ldots, s_n$ rational darstellen läßt.

In neuester Zeit erst ist durch eine im 23. Bande der „Acta Mathematica" (1900) veröffentlichte Arbeit von Vahlen bekannt geworden, daß nach beliebiger Wahl einer der Zahlen $m = 2, 3, \ldots, n$ und nach Beseitigung aller Potenzsummen $s_m, s_{2m}, s_{3m}, \ldots$ auch noch von den übrig bleibenden Potenzsummen die ersten n zu einem Fundamentalsystem vereinigt werden können.

Ich will jetzt zeigen, *daß, wenn man unter g irgendeine ganze positive Zahl versteht, welche die Bedingung*

$$n \geqq g \geqq \frac{n-1}{2} \tag{1}$$

erfüllt und sich aus den $g+1$ Potenzsummen $s_{g+1}, s_{g+2}, \ldots, s_{2g+1}$ ganz beliebig $n-g$ Potenzsummen $s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ herausgegriffen denkt, notwendig auch $s_1, s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ ein Fundamentalsystem bilden. (Zufolge (1) ist stets $g+1 \geqq n-g$, und Gleichheit kann nur bestehen, wenn die zu nichts Neuem führende Wahl $g = \frac{n-1}{2}$, vorausgesetzt, daß n ungerade ist, getroffen wurde.)

Zum Beweise ist es am einfachsten, von der Girardschen Formel auszugehen, durch welche die Potenzsummen in independenter Form als ganze rationale Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen dargestellt werden. Versteht man unter f_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ die elemen-

tare symmetrische Funktion λ-ter Dimension von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so besteht die Girardsche Formel in dem Gleichungssystem

$$(2)\quad s_\lambda = (-1)^\lambda \cdot \lambda \cdot \sum_{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)} \frac{(-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} (\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}+\mu_n-1)!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots!\,\mu_n!} f_1^{\mu_1} f_2^{\mu_2} \cdots f_n^{\mu_n}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots),$$

worin sich die Summation auf alle diejenigen Werte

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots$$

zu erstrecken hat, welche die Bedingung

$$(3)\qquad \mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + n\mu_n = \lambda$$

erfüllen. Die analogen Formeln, durch welche die elementaren symmetrischen Funktionen durch die ersten Potenzsummen ausgedrückt werden, lauten bekanntlich:

$$(4)\qquad f_\lambda = (-1)^\lambda \sum_{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda)} \frac{(-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\lambda}}{1^{\mu_1}.2^{\mu_2}\ldots.\lambda^{\mu_\lambda}\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_\lambda!} s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_\lambda^{\mu_\lambda}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei über alle $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ summiert werden muß, für welche $\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + \lambda\mu_\lambda = \lambda$ ist.

Das Entscheidende ist nun, daß für alle $\lambda = g+1, g+2, \ldots, 2g+1$ die rechten Seiten von (2), wenn sie als ganze rationale Funktionen von $f_{g+1}, f_{g+2}, \ldots, f_n$ allein betrachtet werden, stets *lineare* Funktionen dieser Ausdrücke sein müssen. Gesetzt nämlich, es kämen in einem der Produkte $f_1^{\mu_1} f_2^{\mu_2} \ldots f_n^{\mu_n}$ *mehrere* Faktoren $f_\varrho^{\mu_\varrho}, f_\sigma^{\mu_\sigma}, \ldots$ vor, für welche $g < \varrho < \sigma < \ldots$ und $\mu_\varrho > 0$, $\mu_\sigma > 0, \ldots$ ist, oder, wenn dies nicht der Fall, doch ein Faktor $f_\varrho^{\mu_\varrho}$, der die Bedingungen $g < \varrho$, $\mu_\varrho > 1$ erfüllt, so wäre im ersten Falle $\varrho\mu_\varrho + \sigma\mu_\sigma + \ldots \geqq 2g+3$ und im zweiten $\varrho\mu_\varrho \geqq 2g+2$, in beiden Fällen also a fortiori $\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + n\mu_n > 2g+1$, was wegen (3) für alle $\lambda = g+1, g+2, \ldots, 2g+1$ nie eintreten darf. Da wir nun die Werte $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-g}$ den Zahlen $g+1, g+2, \ldots, 2g+1$ beliebig entnommen haben, so gehen die betreffenden Gleichungen (2), wenn man für $f_1, f_2, \ldots, f_g$ die nach (4) zu bildenden ganzen rationalen Funktionen von $s_1, s_2, \ldots, s_g$ einsetzt, über in ein System von der Form

$$(5)\qquad s_{\lambda_i} = C_{\lambda_i,1} f_{g+1} + C_{\lambda_i,2} f_{g+2} + \ldots + C_{\lambda_i,n-g} f_n + C_{\lambda_i,n-g+1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-g),$$

worin die Größen C in der angegebenen Weise von $s_1, s_2, \ldots, s_g$ abhängen. Träte dabei der Fall ein, daß die Determinante $(n-g)$-ten Grades $|C_{\lambda_i,\varrho}|_{(i,\varrho=1,2,\ldots,n-g)}$ verschwindet, so ergäbe sich hieraus eine lineare Abhängigkeit zwischen den $n-g$ Ausdrücken $s_{\lambda_i} - C_{\lambda_i,n-g+1}$ $(i=1, 2, \ldots, n-g)$

mit Koeffizienten, die rational in $s_1, s_2, \ldots, s_g$ sind, also eine Beziehung zwischen $s_1, s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$. Mithin müßte die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(s_1, s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

identisch verschwinden und folglich auch die bis auf einen von Null verschiedenen numerischen Faktor mit ihr identische Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{g-1}, & x_2^{g-1}, & \ldots, & x_n^{g-1} \\ x_1^{\lambda_1-1}, & x_2^{\lambda_1-1}, & \ldots, & x_n^{\lambda_1-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\lambda_{n-g}-1}, & x_2^{\lambda_{n-g}-1}, & \ldots, & x_n^{\lambda_{n-g}-1} \end{vmatrix}$$

Nach den für Determinanten geltenden Grundbegriffen erhält man aber, abgesehen von den Koeffizienten, die sämtlichen $n!$ Glieder von D, wenn man in $x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} . \ldots . x_n^{\alpha_n}$ das System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ alle aus den n Elementen $0, 1, \ldots, g-1, \lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_{n-g} - 1$ gebildeten Permutationen durchlaufen läßt. Da nun von diesen Elementen keine zwei einander gleich sind, also die auf die angegebene Weise aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildeten Terme sämtlich voneinander verschieden sind, so müßte wegen der Unabhängigkeit dieser Größen das identische Verschwinden von D durch das Verschwinden sämtlicher $n!$ Koeffizienten bedingt sein, im Widerspruch zu der Tatsache, daß diese Koeffizienten bekanntlich alle den Wert ± 1 haben. Die Annahme, von der wir ausgingen, es sei $\underset{(i, \varrho = 1, 2, \ldots, n-g)}{|C_{\lambda_i, \varrho}|} = 0$, ist also auszuschließen, und diese Determinante hat somit einen von Null verschiedenen Wert; folglich lassen sich die Gleichungen (5), d. h. die Gleichungen

$$C_{\lambda_i, 1} f_{g+1} + C_{\lambda_i, 2} f_{g+2} + \ldots + C_{\lambda_i, n-g} f_n = s_{\lambda_i} - C_{\lambda_i, n-g+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-g)$$

in bezug auf $f_{g+1}, f_{g+2}, \ldots, f_n$ eindeutig auflösen, was unmittelbar zu einer Darstellung dieser Ausdrücke als rationale Funktionen von s_1, $s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ führt. Da nun die analoge Aufgabe hinsichtlich $f_1, f_2, \ldots, f_g$ schon durch (4) gelöst wird, da also sämtliche elementaren symmetrischen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rational durch s_1, $s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ darstellbar sind, so müssen diese Potenzsummen in der Tat, wie behauptet, ein Fundamentalsystem sein.

(Eingegangen am 2. 7. 1920.)

Über relativ Galoissche Zahlkörper.

Von

Michael Bauer in Budapest.

1. Es seien die Körper G_1 und G_2 in einem Bereiche Γ relativ Galoissche Körper vom Grade n_1 und n_2. Der zusammengesetzte Körper $G = k(G_1, G_2)$ ist wieder ein relativ Galoisscher Körper, sein Grad werde durch n bezeichnet. Es sei ferner $\mathfrak{p}$ eine Primgröße von Γ und es sollen die folgenden Zerlegungen statthaben: in G_1

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2' \dots \mathfrak{p}_{e_1}')^{g_1},$$

wo $\mathfrak{p}_i'$ verschiedene Primideale vom Grade f_1 sind, in G_2

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1'' \mathfrak{p}_2'' \dots \mathfrak{p}_{e_2}'')^{g_2},$$

wo $\mathfrak{p}_i''$ verschiedene Primideale vom Grade f_2 bedeuten, und endlich in G

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_e)^{g},$$

wo $\mathfrak{P}_i$ verschiedene Primideale vom Grade f bezeichnen. Es lassen sich folgende Sätze beweisen[1]).

I. Ist eine der Zahlen g_1, g_2 z. B. $g_1 = 1$, dann wird:

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

II. Bezeichnen wir ein beliebiges der Primideale $\mathfrak{P}_i$ durch $\mathfrak{P}$[2]). Wenn die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ eine zyklische Gruppe ist, was in dem Falle $(g_i, p) = 1$ $(i = 1, 2)$ sicher eintritt[3]), wenn ferner $(g_1, g_2) = 1$ ausfällt, so wird:

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

---

[1]) Vgl. meine frühere Note: Über zusammengesetzte Zahlkörper. Math. Ann., 77, S. 357. Die Sätze I–II behandle ich auf eine ganz andere Weise in der Note: Bemerkung über die Zusammensetzung der Zahlkörper. Journal für Math., 150, S. 185–188.

[2]) Die Behauptung der Fußnote *) S. 358 a. a. O., daß die Trägheitsgruppe eine invariante Untergruppe der Körpergruppe sei, stammt von H. Weber (Math. Ann., 67, S. 43). Der Beweis ist jedoch unrichtig.

[3]) Die Zahl p ist die rationale Primzahl, welche durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist.

III. Bekannterweise ist $n = \frac{n_1 n_2}{\nu}$, wo ν den Relativgrad des größten gemeinsamen Körpers von G_1 und G_2 bezeichnet. Wenn $\left(\frac{n_1}{\nu}, \frac{n_2}{\nu}\right) = 1$ ausfällt, dann bestehen die Relationen:

$$g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}, \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}, \quad e = \frac{n}{fg}.$$

2. Nun sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe von G, die Körper G_1, G_2 sollen zu den Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ gehören, welche relativ prime invariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$ bilden. Die Zerlegungsgruppe bzw. Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ sollen durch $\mathfrak{H}$ bzw. $\overline{\mathfrak{H}}$ bezeichnet werden. Die Gruppe $\overline{\mathfrak{H}}$ bildet eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$, die Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\overline{\mathfrak{H}}}$ ist zyklisch. Die Ordnungen von $\mathfrak{H}$, $\overline{\mathfrak{H}}$ sind fg bzw. g. Es bestehen die Relationen:

$$g = g_i a_i, \quad f_i = \frac{f a_i}{h_i} \qquad (i = 1, 2), \tag{1}$$

wo die Zahlen a_i, h_i die Ordnungen der größten gemeinsamen Teiler der Gruppen

$$(\mathfrak{G}_i, \overline{\mathfrak{H}}) \quad \text{bzw.} \quad (\mathfrak{G}_i, \mathfrak{H})$$

bedeuten.

3. Wenn $g_1 = 1$ ausfällt, ist $g = a_1$, infolgedessen bildet $\overline{\mathfrak{H}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$. Daher ist

$$(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}) = \mathfrak{A}$$

eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, die $\overline{\mathfrak{H}}$ enthält. Betrachten wir die Gruppe

$$(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{H}) = \mathfrak{B}.$$

Da dieselbe relativ prim gegen $\mathfrak{A}$ ist und $\overline{\mathfrak{H}}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ bildet, so wird bekanntlich die Gruppe $\overline{\mathfrak{H}}$ den größten gemeinsamen Teiler der Gruppen $\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{A}$ bilden. Also sind die Gruppen:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\overline{\mathfrak{H}}}, \quad \frac{\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}}{\overline{\mathfrak{H}}} \tag{2}$$

relativ prime Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\overline{\mathfrak{H}}}$. Infolgedessen werden die Ordnungen der Gruppen (2), d. h. die Zahlen

$$\frac{h_1}{g} = \frac{h_1}{a_1}, \quad \frac{h_2 g}{g} = h_2,$$

relativ prim gegeneinander ausfallen. Es wird daher[4])

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = 1. \tag{3}$$

[4]) In unserem Falle ist übrigens $a_2 = 1$.

Da aus (1)

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} T,$$

T rat. ganz folgt, erhält man

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad \frac{h_2}{a_2} = \frac{f_1}{(f_1, f_2)} T, \quad T = 1,$$

womit I. bewiesen ist.

4. Es sei die Trägheitsgruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ eine zyklische Gruppe, welche durch die Elemente

$$C, C^2, \ldots, C^g = E$$

gebildet wird. Wenn $(g_1, g_2) = 1$ ausfällt, dann erzeugen die Potenzen von C^{g_1} bzw. C^{g_2} eine zyklische Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{H}}_2$, deren Ordnungen gleich $a_1 = g_2$ bzw. $a_2 = g_1$ sind. Die Untergruppen $\bar{\mathfrak{H}}_1, \bar{\mathfrak{H}}_2$ sind relativ prime invariante Untergruppen von $\bar{\mathfrak{H}}$, und folglich auch von $\mathfrak{H}$, es bestehen noch die Relationen:

$$\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{H}}_1 \bar{\mathfrak{H}}_2 = \bar{\mathfrak{H}}_2 \bar{\mathfrak{H}}_1, \quad (\mathfrak{G}_1, \bar{\mathfrak{H}}) = \bar{\mathfrak{H}}_1, \quad (\mathfrak{G}_2, \bar{\mathfrak{H}}) = \bar{\mathfrak{H}}_2.$$

Nun betrachten wir die Gruppen

$$(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}) = \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{G}_2, \mathfrak{H}) = \mathfrak{B}.$$

Da $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ relativ prim ausfallen, so enthalten nach dem Vorigen die Gruppen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ die Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{H}}_2$, sind aber relativ prim gegen $\bar{\mathfrak{H}}_2$ bzw. $\bar{\mathfrak{H}}_1$. Aus der Theorie der endlichen Gruppen folgt, daß die Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ den größten gemeinsamen Teiler der Gruppen

$$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2, \quad \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1 \tag{4}$$

bildet. Der Komplex

$$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2 \cdot \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1 \tag{4*}$$

enthält nämlich $\frac{h_1 g_1 h_2 g_2}{d}$ verschiedene Elemente, wo d die Ordnung des größten gemeinsamen Teilers der Gruppen (4) ist. Infolgedessen wird $d \geqq g_1 g_2$. Andererseits enthält (4*) die Elemente von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, enthält also mindestens $h_1 h_2$ verschiedene Elemente, folglich ist $d \leqq g_1 g_2$, woraus unsere Behauptung folgt. Daher bilden die Gruppen

$$\frac{\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2}{\bar{\mathfrak{H}}}, \quad \frac{\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1}{\bar{\mathfrak{H}}}$$

relativ prime Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}}$. Ihre Ordnungen, d. h. die Zahlen

$$\frac{h_1 g_1}{g} = \frac{h_1 g_1}{g_1 g_2} = \frac{h_1}{a_1}, \quad \frac{h_2 g_2}{g} = \frac{h_2 g_2}{g_1 g_2} = \frac{h_2}{a_2}$$

sind relativ prim gegeneinander. Aus

(3) $$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = 1$$

folgt wieder

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)},$$

womit II. bewiesen ist.

5. Nehmen wir jetzt $\left(\frac{n_1}{\nu}, \frac{n_2}{\nu}\right) = 1$ an. Da die Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ gleich $\frac{n}{n_1} = \frac{n_2}{\nu}$ bzw. $\frac{n}{n_2} = \frac{n_1}{\nu}$ sind, wird

$$(h_1, h_2) = 1,$$

also

$$(a_1, a_2) = 1, \quad \left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = 1$$

ausfallen, woraus

$$g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}, \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$$

folgen. Damit ist III. bewiesen[5].

6. Sei $\overline{G}$ der größte gemeinsame Körper von G_1 und G_2. Sein Relativgrad ν soll größer als Eins ausfallen. Wenn die Primgröße $\mathfrak{p}$ des Bereiches Γ in $\overline{G}$ mehrfache Primfaktoren besitzt, so ist aus unseren Resultaten leicht ersichtlich, daß die Annahme $(g_1, g_2) = 1$ durch eine leichtere Forderung ersetzt werden kann. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen.

---

[5]) Aus (1) und $(h_1, h_2) = 1$ folgt $fg = \frac{f_1 g_1 f_2 g_2}{(f_1 g_1, f_2 g_2)}$, daher ist
$$(f_1 g_1, f_2 g_2) = (f_1, f_2)(g_1, g_2).$$

(Eingegangen am 2. 9. 1920.)

Über die Differente eines algebraischen Zahlkörpers.

Von

Michael Bauer in Budapest.

---

1. Es sei in einem algebraischen Zahlkörper K für die Primzahl p:

$$p = \mathfrak{p}^g \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1,$$

wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal bedeutet und noch die Relationen

$$g = p^s g', \quad (p, g') = 1$$

gelten. Ist die Differente des Körpers genau durch $\mathfrak{p}^{v-1}$ teilbar, so hat man

$$v \leqq (s+1) g. \tag{1}$$

Diese zuerst von H. Hensel bewiesene Formel wurde in einer früheren Note[1]) für Galoissche Körper aus der Hilbertschen Theorie der Galoisschen Körper abgeleitet. Ich will zeigen, daß die Formel (1) auch im allgemeinen Falle aus den genannten Untersuchungen gefolgert werden kann, wenn man noch den Satz von Dedekind über die Zerlegung einer Primgröße in den Unterkörpern eines Galoisschen Körpers benutzt[2]).

2. Es sei G der Galoissche Körper von K und $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal in G, welches $\mathfrak{p}$ teilt. Da G in bezug auf K ein relativ Galoisscher Körper ist, bestehen die Relationen:

$$\mathfrak{p} = (\bar{\mathfrak{p}} \ldots)^a, \quad p = (\bar{\mathfrak{p}} \ldots)^{\bar{g}}, \quad p = \mathfrak{p}^g \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1,$$

woraus

$$g = ga \tag{2}$$

folgt. Nach dem Satze von Dedekind hat (2) folgende Bedeutung. Es sei die Trägheitsgruppe von $\bar{\mathfrak{p}}$ die Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$, der Trägheitskörper soll

---

[1]) Bemerkungen über die Differente des algebraischen Zahlkörpers. Math. Ann. 79, S. 321–322. Der dort gegebene Beweis läßt sich noch vereinfachen. Aus den Eigenschaften der Trägheitsgruppe kann man direkt beweisen, daß die Differente des Körpers G und die Relativdifferente in bezug auf $\mathfrak{K}$ genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ enthalten. (Vgl. den Punkt 3 a. a. O.)

[2]) Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten 1894, S. 272–277.

durch $\bar{H}$ bezeichnet werden, der Körper K gehöre zur Untergruppe $\mathfrak{K}$ der Galoisschen Körpergruppe $\mathfrak{G}$. Dann ist $\bar{g}$ die Ordnung von $\bar{\mathfrak{H}}$ und a ist gleich der Ordnung des größten gemeinsamen Teilers von $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{H}}$. Es besteht noch die folgende algebraische Tatsache. Ist π eine beliebige determinierende ganze Zahl von K, so genügt sie nach Adjunktion von $\bar{H}$ einer irreduziblen Gleichung $f(\pi) = 0$ vom $g = \frac{\bar{g}}{a}$-ten Grade[3]), wo die Koeffizienten von

$$(3) \qquad f(x) = x^g + \alpha x^{g-1} + \ldots + \lambda x + \mu$$

ganze Zahlen von $\bar{H}$ bilden.

3. Nun betrachten wir den zusammengesetzten Körper $C = C(K, \bar{H})$. Die Differente von C ist nach Hilberts Untersuchungen gleich dem Produkte der Relativdifferente von C in bezug auf $\bar{H}$ und der Differente von $\bar{H}$. Der zweite Faktor ist relativ prim gegen $\bar{\mathfrak{p}}$, folglich enthält die Differente von C genau dieselbe Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ wie die Relativdifferente in bezug auf $\bar{H}$[4]). Daher ist die fragliche Potenz gewiß ein Teiler der Relativdifferente von π. (Eventuell ist die Zahl π keine determinierende Zahl von C.) Wir können annehmen, daß π genau durch $\mathfrak{p}$, also genau durch $\bar{\mathfrak{p}}^s$ teilbar ist. Da die Koeffizienten der Gleichung (3) durch Potenzen von $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbar sind, deren Grade Vielfache von $\bar{g} = ag$ bilden[5]), so enthält jedes Glied der Summe

$$(3^*) \qquad f'(\pi) = g\pi^{g-1} + (g-1)\alpha\pi^{g-2} + \ldots + \lambda$$

eine andere Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$, folglich enthält $f'(\pi)$, somit die Differente von C keine höhere Potenz als $\bar{\mathfrak{p}}^{sag + a(g-1)}$.

4. Die Differente von K enthält genau die Potenz p^{v-1}, also ist sie genau durch $\bar{\mathfrak{p}}^{(v-1)a}$ teilbar. Da nach dem Satze über Relativkörper die Differente ein Teiler der Differente von C ist, ergibt sich

$$(v-1)a \leqq sag + a(g-1),$$

folglich

$$v - 1 \leqq (s+1)g - 1,$$

womit (1) bewiesen ist.

5. Es ist noch beweisbar, daß sowohl die Differente des Körpers C, als die Relativdifferente der Zahl π genau durch $\bar{\mathfrak{p}}^{(v-1)a}$ teilbar sind. Zu-

[3]) Landsberg, Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion. Journal für Math. 132, S. 1–20. Die Grundprinzipien gehen auf Dedekind zurück.

[4]) Diese Tatsache ist auch direkt ableitbar.

[5]) Im Trägheitskörper ist nämlich $\bar{\mathfrak{p}}^{\bar{g}} = \bar{\mathfrak{p}}^{ag}$ ein Primideal. Wir rechnen auch die Zahl Null als ein Vielfaches.

nächst gehört der Körper C zur größten gemeinsamen Untergruppe von $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{H}}$. Bezeichnen wir dieselbe durch $\mathfrak{d} = (\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{H}})$ und es sei:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{d} R_1 + \mathfrak{d} R_2 + \ldots,$$

wo die Elemente $R_1, R_2, \ldots$ die nach $\mathfrak{d}$ inkongruenten Repräsentanten der Gruppe $\mathfrak{K}$ darstellen. Ist ω eine beliebige Zahl von C, so bekommt man die Relativkonjugierten in bezug auf K durch Anwendung der Substitutionen R_1, R_2 usw. Da einerseits die Komplexe $\mathfrak{d} R_1$, $\mathfrak{d} R_2, \ldots$ — ausgenommen $\mathfrak{d} = \mathfrak{d} R_1$ — relativ prim gegen $\overline{\mathfrak{H}}$ ausfallen, und andererseits C einen Oberkörper von $\overline{H}$ bildet, ist die Relativdifferente von C in bezug auf K relativ prim gegen $\mathfrak{p}$, folglich enthält die Differente von C genau $\mathfrak{p}^{(v-1)a}$.

6. Die Relativdifferente von C in bezug auf $\overline{H}$ ist, wie aus 3. und 5. folgt, genau durch $\mathfrak{p}^{(v-1)a}$ teilbar. Eine beliebige ganze Zahl Ω des Körpers C hat die Gestalt:

$$\Omega = \frac{\varrho_0 + \varrho_1 \pi + \ldots + \varrho_{g-1} \pi^{g-1}}{\sigma}, \tag{4}$$

wo die Zahlen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{g-1}, \sigma$ ganze Zahlen des Körpers $\overline{H}$ bilden und die Zahl σ relativ prim gegen $\mathfrak{p}$ ist. Dies folgt daraus, daß $\bar{\mathfrak{p}}^{g} = \mathfrak{p}^{ag}$ ein Primideal in $\overline{H}$ ist und die Zahl π genau $\mathfrak{p}^{a}$ enthält. Aus (4) folgt aber, daß die Relativdifferente des Körpers C in bezug auf $\overline{H}$ dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ enthält wie die Relativdifferente der Zahl π, was zu beweisen war.

(Eingegangen am 2. 9. 1920.)

Über diophantische Approximationen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

Bekanntlich lassen sich n reelle Zahlen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ stets durch rationale Brüche mit gemeinsamem beliebig großem Nenner q derart approximieren, daß

$$\text{(I)} \qquad \left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{1}{q\sqrt[n]{q}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, wie man am einfachsten mit einer berühmten auf Dirichlet zurückgehenden Methode beweist[1]). Man kann nun fragen, ob noch bessere Approximationen möglich sind, ob an Stelle der Ungleichung (I) etwa die schärfere

$$\text{(II)} \qquad \left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{\delta}{q\sqrt[n]{q}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

treten darf, wo $\delta < 1$ ist. In der Tat hat Minkowski bewiesen[2]), daß hier der Wert $\delta = \frac{n}{n+1}$ zulässig ist. Für $n = 1$ hat Hurwitz gezeigt[3]), daß man für δ den Wert $\frac{1}{\sqrt{5}}$ nehmen darf, daß aber kein kleinerer Wert mehr zulässig ist. Während für $n = 1$ die Frage damit zum Abschluß gebracht ist, ist man für $n > 1$ über das Minkowskische Resultat nicht hinausgekommen. Von keiner Zahl δ, die kleiner als $\frac{n}{n+1}$ ist, weiß man,

---

[1]) L. Kronecker, Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variablen, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1884, S. 1071–1080 = Werke III 1, S. 33–46. Vgl. auch des Verfassers Buch „Irrationalzahlen", Berlin V. W. V. 1921, § 37.

[2]) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, S. 112.

[3]) A. Hurwitz, Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, Mathematische Annalen **39** (1891), S. 279–284. Vgl. auch des Verfassers Bücher „Die Lehre von den Kettenbrüchen", Leipzig 1913, § 14 und „Irrationalzahlen", Berlin 1921, § 36.

ob sie zulässig oder nicht zulässig ist. Herr Borel hat lediglich bewiesen, daß die Ungleichung (I) nicht durch

$$\text{(III)} \qquad \left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{C}{q^{1+s}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ersetzt werden darf, wo $s > \frac{1}{n}$, und C selbst beliebig groß ist[4]). Hiernach wäre es immer noch möglich, daß in (II) sogar beliebig kleine δ zulässig sind. Ich werde nun zeigen, daß das nicht der Fall ist. Während aber Herr Borel lediglich aus mengentheoretischen Überlegungen schließt, daß gewisse Zahlen α_ν vorhanden sein müssen, die den Ungleichungen (III) nicht genügen, ohne daß er wirklich solche Zahlen vorzeigen kann, werde ich in § 1 und § 2 tatsächlich Zahlen angeben, für welche die Ungleichungen (II) bei zu kleinem δ nicht erfüllbar sind (und natürlich erst recht nicht die Ungleichungen (III)).

Auf der andern Seite kann man für $n = 1$ auch Zahlen konstruieren, die sehr viel stärkere Approximationen gestatten, so daß auf der rechten Seite von (I) eine beliebig hohe Potenz von q im Nenner stehen darf (Liouvillesche Zahlen); ich werde in § 3 analoge Zahlensysteme auch für $n > 1$ angeben.

§ 1.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seien ganze Zahlen eines reellen algebraischen Körpers $\mathfrak{K}$ vom $(n+1)$-ten Grad, zwischen denen keine Relation der Form

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu - l = 0$$

mit rationalen Koeffizienten k_ν, l besteht, ohne daß alle k_ν (und folglich auch l) verschwinden. $\mathfrak{K}' \ldots \mathfrak{K}^{(n)}$ seien die zu $\mathfrak{K}$ konjugierten Körper, und allgemein sei $\alpha_\nu^{(\mu)}$ die zu α_ν konjugierte Zahl im Körper $\mathfrak{K}^{(\mu)}$. Setzt man dann

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu^{(\mu)} - \alpha_\nu| = \varrho_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{(3)} \qquad \prod_{\mu=1}^{n} \varrho_\mu = \sigma,$$

so ist offenbar $\sigma > 0$, und wir beweisen jetzt den

---

[4]) E. Borel, Contribution à l'analyse arithmétique du continu, Journal de mathématiques pures et appliquées (5), 9 (1903), S. 329–375.

Satz 1. *Die n Ungleichungen*

$$\left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{\delta}{q\sqrt[n]{q}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo p_ν, q ganze rationale Zahlen bedeuten ($q > 0$), *können nicht für beliebig große q bestehen, wenn $\delta < \frac{1}{n\sigma}$ ist.*

Sind p_ν, q ganze Zahlen von der in dem Satz verlangten Art, so findet man durch die schon erwähnte Dirichletsche Methode[5]) leicht, daß die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu p_\nu - lq = 0$$

durch ganze rationale Zahlen k_ν, l, die nicht alle verschwinden, befriedigt werden kann, wobei $|k_\nu| \leqq \sqrt[n]{q}$ ist. Dann ergibt sich:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu - l\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu\left(\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right)\right| < \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt[n]{q}\,\frac{\delta}{q\sqrt[n]{q}} = \frac{n\delta}{q},$$

wobei wir bemerken, daß die linke Seite nach unseren Voraussetzungen über die Zahlen α_ν gewiß nicht verschwindet. Weiter erhält man für $\mu = 1, 2, \ldots, n$:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu^{(\mu)} - l\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu (\alpha_\nu^{(\mu)} - \alpha_\nu) + \left(\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu - l\right)\right|$$

$$< \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt[n]{q}\,|\alpha_\nu^{(\mu)} - \alpha_\nu| + \frac{n\delta}{q} = \sqrt[n]{q}\left(\varrho_\mu + \frac{n\delta}{q\sqrt[n]{q}}\right).$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu - l\right| \cdot \prod_{\mu=1}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu^{(\mu)} - l\right| < n\delta \prod_{\mu=1}^{n}\left(\varrho_\mu + \frac{n\delta}{q\sqrt[n]{q}}\right).$$

Hier steht aber auf der linken Seite der absolute Betrag der Norm einer nicht verschwindenden ganzen algebraischen Zahl, also eine ganze rationale Zahl, die mindestens gleich 1 ist. Daher wird

$$1 < n\delta \prod_{\mu=1}^{n}\left(\varrho_\mu + \frac{n\delta}{q\sqrt[n]{q}}\right),$$

---

[5]) G. Lejeune Dirichlet, Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1842, S. 93—95 = Werke I, S. 635—638.

und wenn q beliebig groß sein kann, so folgt hieraus:

$$1 \leq n\delta \prod_{\mu=1}^{n} \varrho_\mu = n\,\delta\,\sigma,$$

also $\delta \geqq \frac{1}{n\sigma}$. W. z. b. w.

Ist speziell $n = 1$, und $\alpha_1 = \sqrt{D}$, so ist $\sigma = \varrho_1 = 2\sqrt{D}$; also $\delta \geqq \frac{1}{2\sqrt{D}}$. Nun ist, wenn man $\sqrt{D}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt, mit der in meinem Buch (Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913) gebrauchten Bezeichnung

$$\left|\sqrt{D} - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| = \frac{1}{B_\nu(B_\nu \xi_{\nu+1} + B_{\nu-1})} < \frac{1}{\xi_{\nu+1} B_\nu^2} < \frac{1}{b_{\nu+1} B_\nu^2}.$$

Die Ungleichung $\delta \geqq \frac{1}{2\sqrt{D}}$ lehrt daher, daß von einem gewissen ν an $b_{\nu+1} < 2\sqrt{D}$ ist*). Die Teilnenner des Kettenbruches sind also beschränkt. Das ist natürlich nichts Neues, sondern in dem viel mehr sagenden Satz enthalten, daß der Kettenbruch periodisch ist. Während man aber zu der Periodizität im Fall $n > 1$ kein Analogon hat, ist zu der weniger tief greifenden Tatsache, daß die Teilnenner beschränkt sind, in Satz 1 immerhin ein bemerkenswertes Analogon zu sehen.

§ 2.

Wir wählen jetzt als Beispiel die Zahlen

$$\alpha_\nu = \sqrt[n+1]{2^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

die offenbar unsere Voraussetzung, daß keine Relation der Form (1) besteht, erfüllen; denn die Gleichung $x^{n+1} - 2 = 0$ ist ja nach dem Eisensteinschen Kriterium irreduzibel. Die konjugierten Zahlen sind hier

$$\alpha_\nu^{(\mu)} = \left(\sqrt[n+1]{2}\, e^{\frac{2\pi i \mu}{n+1}}\right)^\nu.$$

---

*) Andernfalls wäre nämlich unendlich oft $b_{\nu+1} \geqq 2\sqrt{D}$, und weil $b_{\nu+1}$ ganzzahlig ist, auch

$$b_{\nu+1} \geqq [2\sqrt{D}] + 1,$$

wo durch die eckige Klammer die größte ganze Zahl bezeichnet ist; daher

$$\left|\sqrt{D} - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{[2\sqrt{D}]+1}\,\frac{1}{B_\nu^2}.$$

Somit wäre $\delta = \frac{1}{[2\sqrt{D}]+1}$ zulässig, was der Ungleichung $\delta \geqq \frac{1}{2\sqrt{D}}$ widerspricht.

Daher ist

$$|\alpha_\nu^{(\mu)} - \alpha_\nu| = \sqrt[n+1]{2^\nu}\,\left|e^{\frac{2\pi i\mu\nu}{n+1}} - 1\right| = 2\sqrt[n+1]{2^\nu}\left|\sin\frac{\pi\mu\nu}{n+1}\right| \leqq 2\sqrt[n+1]{2^\nu}.$$

Folglich

$$\varrho_\mu \leqq \sum_{\nu=1}^{n} 2\sqrt[n+1]{2^\nu} < \frac{2}{\sqrt[n+1]{2}-1},$$

$$\sigma = \prod_{\mu=1}^{n} \varrho_\mu < \left(\frac{2}{\sqrt[n+1]{2}-1}\right)^n.$$

Aus Satz 1 folgt also

Satz 2. *Es gibt Systeme von n Zahlen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, für welche die gleichzeitigen diophantischen Approximationen*

$$\left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt[n+1]{2}-1}{2}\right)^n \frac{1}{q\sqrt[n]{q}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

nicht bei beliebig großem q möglich sind. Insbesondere ist $\alpha_\nu = \sqrt[n+1]{2^\nu}$ ein solches System.

Um für δ eine möglichst günstige, d. h. große untere Schranke zu erhalten, muß man versuchen, einen Körper $\mathfrak{K}$ und ganze Zahlen α_ν in ihm ausfindig zu machen, für welche σ möglichst klein ausfällt. Für $n = 1$ wählen wir $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; dann ist

$$\sigma = \varrho_1 = |\alpha_1' - \alpha_1| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \sqrt{5}.$$

Daraus folgt: $\delta \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nach dem in der Einleitung erwähnten Hurwitzschen Satz ist das bereits die höchstzulässige untere Schranke.

Für $n = 2$ sei α_1 die positive Wurzel der Gleichung

$$x^3 + x - 1 = 0,$$

und $\alpha_2 = \alpha_1^2$. Die konjugierten Körper sind imaginär, und man erhält:

$$\begin{aligned}\sigma &= (|\alpha_1' - \alpha_1| + |\alpha_1'^2 - \alpha_1^2|)(|\alpha_1'' - \alpha_1| + |\alpha_1''^2 - \alpha_1^2|)\\ &= |\alpha_1' - \alpha_1|\cdot|\alpha_1'' - \alpha_1|\cdot(1 + |\alpha_1' + \alpha_1|)(1 + |\alpha_1'' + \alpha_1|).\end{aligned}$$

Da aber α_1, α_1', α_1'' die Wurzeln der obigen kubischen Gleichung sind, so ist

$$\begin{aligned}(\alpha_1' - \alpha_1)(\alpha_1'' - \alpha_1) &= \alpha_1'\alpha_1'' - (\alpha_1' + \alpha_1'')\alpha_1 + \alpha_1^2\\ &= \frac{1}{\alpha_1} - (-\alpha_1)\alpha_1 + \alpha_1^2 = \frac{1}{\alpha_1} + 2\alpha_1^2 = 3\alpha_1^2 + 1;\end{aligned}$$

ferner sind α_1' und α_1'' konjugiert komplex, also

$$|\alpha_1' + \alpha_1| = |\alpha_1''| = |\alpha_1'| = \sqrt{|\alpha_1''\alpha_1'|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}.$$

Daher

$$\sigma = (3\alpha_1^2 + 1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\alpha_1 = 0{,}68233 - ,$$
$$\frac{1}{2\sigma} = 0{,}04269 + .$$

Das ist eine weit bessere untere Schranke für δ als die aus der Wahl $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$, $\alpha_2 = \sqrt[3]{4}$ hervorgehende. Man erhält so

Satz 3. *Es gibt Zahlenpaare α_1, α_2, für welche die gleichzeitigen diophantischen Approximationen*

$$\left|\alpha_1 - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{0{,}04269}{q\sqrt{q}}, \qquad \left|\alpha_2 - \frac{p_2}{q}\right| < \frac{0{,}04269}{q\sqrt{q}}$$

nicht bei beliebig großem q möglich sind. Ein solches Zahlenpaar hat man beispielsweise, wenn man für α_1 die positive Wurzel der Gleichung $x^3 + x - 1 = 0$ wählt und $\alpha_2 = \alpha_1^2$ nimmt.

Für $n = 3$ erhält man ein verhältnismäßig günstiges Resultat, wenn man

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \qquad \alpha_2 = \alpha_1^2, \qquad \alpha_3 = \alpha_1^3$$

setzt. Eine leichte Rechnung ergibt dann

$$\sigma = (1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{5})^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$
$$\frac{1}{3\sigma} = 0{,}00383 + .$$

Daraus folgt sogleich

Satz 4. *Es gibt Zahlentripel α_1, α_2, α_3, für welche die gleichzeitigen diophantischen Approximationen*

$$\left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{0{,}00383}{q\sqrt[3]{q}} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

nicht bei beliebig großem q möglich sind. Beispielsweise ist

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \alpha_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

ein derartiges Tripel.

§ 3.

Haben wir bisher Zahlen konstruiert, die schon verhältnismäßig geringe Approximationen nicht mehr gestatten, so wollen wir jetzt im Gegenteil auch Zahlen angeben, bei denen ganz beliebig starke Approximationen möglich sind. Sei $\varphi(q)$ eine Funktion, die mit q beliebig rasch ins Unendliche wächst; dann wollen wir zeigen, daß die diophantischen Approximationen

$$(4) \qquad \left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{1}{q\,\varphi(q)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bei geeigneter Wahl der n Zahlen α_ν für beliebig große q möglich sind. Dabei werden wir verlangen, daß die Zahlen α_ν keiner Relation der Form (1) genügen. Denn wenn man solche Relationen zuließe, so wäre die Angabe derartiger Zahlen trivial; man hätte nur nötig, sämtliche α_ν gleich ein und derselben geeigneten Liouvilleschen Zahl zu wählen.

Wir setzen nun

$$(5) \qquad \alpha_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\nu^\lambda}{g_1\, g_2 \cdots g_\lambda} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die g_λ positive ganze Zahlen sind, die mit λ monoton, und zwar so rasch wachsen, daß sie den Ungleichungen genügen:

$$(6) \qquad g_{\lambda+1} > n + n^{\lambda+1}\varphi(g_1\, g_2 \cdots g_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Setzt man

$$g_1\, g_2 \cdots g_\mu = q_\mu,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} \frac{\nu^\lambda}{q_\lambda} = \frac{p_{\nu\mu}}{q_\mu},$$

so sind auch die q_μ und $p_{\nu\mu}$ ganze Zahlen, und man hat:

$$\left|\alpha_\nu - \frac{p_{\nu\mu}}{q_\mu}\right| = \sum_{\lambda=\mu+1}^{\infty} \frac{\nu^\lambda}{q_\lambda} < \sum_{\lambda=\mu+1}^{\infty} \frac{n^\lambda}{q_\mu\, g_{\mu+1}^{\lambda-\mu}} = \frac{n^{\mu+1}}{q_\mu (g_{\mu+1} - n)} < \frac{1}{q_\mu\, \varphi(q_\mu)},$$

letzteres wegen (6). Damit ist die behauptete Approximation nachgewiesen, und wir müssen nur noch zeigen, daß eine Relation der Form (1) mit ganzen rationalen k_ν, l nicht bestehen kann, außer wenn alle k_ν verschwinden.

Angenommen, es bestehe eine solche Relation. Dann ist

$$0 = q_\mu\Big(\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu - l\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \Big(p_{\nu\mu} + \sum_{\lambda=\mu+1}^{\infty} \frac{q_\mu \nu^\lambda}{q_\lambda}\Big) - q_\mu l$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu p_{\nu\mu} - q_\mu l + \sum_{\lambda=\mu+1}^{\infty} \frac{k_1 + k_2\, 2^\lambda + \ldots + k_n n^\lambda}{g_{\mu+1}\, g_{\mu+2} \cdots g_\lambda}.$$

Hiernach ist die letzte hier auftretende Summe gleich einer ganzen Zahl, und da sie für genügend große μ offenbar absolut beliebig klein wird, muß sie Null sein; also:

$$\sum_{\lambda=\mu+1}^{\infty} \frac{k_1 + k_2 2^\lambda + \ldots + k_n n^\lambda}{g_{\mu+1} g_{\mu+2} \cdots g_\lambda} = 0 \tag{7}$$

für alle hinreichend großen μ. Ersetzt man μ durch $\mu + 1$, so ist dann auch

$$\sum_{\lambda=\mu+2}^{\infty} \frac{k_1 + k_2 2^\lambda + \ldots + k_n n^\lambda}{g_{\mu+2} g_{\mu+3} \cdots g_\lambda} = 0. \tag{8}$$

Subtrahiert man nun die Gleichung (8) von (7), nachdem man letztere mit $g_{\mu+1}$ multipliziert hat, so folgt:

$$k_1 + 2^{\mu+1} k_2 + \ldots + n^{\mu+1} k_n = 0$$

für alle hinreichend großen μ. Setzt man hier n aufeinanderfolgende Zahlen für μ ein, so entstehen n lineare Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante, woraus folgt, daß alle $k_\nu = 0$ sind. W. z. b. w.

(Eingegangen am 4. 11. 1920.)

Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes*).

Von

E. Kamke in Hagen i. W.

Dem Andenken an meinen Freund
Dr. Detlef Cauer,
gefallen am Kemmel-Berg 26. 4. 1918.

Einleitung.

Unter dem Waring-Hilbertschen Satz wird folgender von Waring[1]) behauptete und von Herrn Hilbert[2]) erstmalig bewiesene Satz verstanden:

Zu jeder positiven ganzen Zahl n gibt es eine positive ganze Zahl N von der Art, daß jede ganze Zahl $Z \geqq 0$ in N n-te Potenzen ganzer Zahlen $x_\varkappa \geqq 0$ zerfällbar ist; d. h. daß für jedes ganze $Z \geqq 0$ die Gleichung

$$Z = \sum_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^n$$

in ganzen Zahlen $x_\varkappa \geqq 0$ lösbar ist.

Ebenfalls von Waring[3]) ist noch eine weitergehende Behauptung aufgestellt. Sie lautet etwa[4]) folgendermaßen:

*) Diese Abhandlung ist von der Philosoph. Fakultät der Universität Göttingen 1919 als Doktor-Dissertation angenommen.

[1]) Waring, Meditationes algebraicae, 3. Aufl., Cambridge (1782), S. 349.

[2]) Nachrichten v. d. Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-physik. Klasse, 1909, S. 17—36; sowie Math. Ann. 67 (1909), S. 281—300. — Für andere Beweisanordnungen und Vereinfachungen siehe Hausdorff, Math. Ann., 67 (1909), S. 301—305; Stridsberg, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 6 (1911), Nr. 32 und 39, sowie Math. Ann., 72 (1912), S. 145—152; Remak, Math. Ann., 72 (1912), S. 153—156; Frobenius, Sitzungsberichte d. Kgl. Preuß. Akademie d. Wissenschaften, Berlin, 1912, S. 666—670; E. Schmidt, Math. Ann. 74 (1913), S. 271—274. Ein gänzlich anderer Beweis mit viel weiter reichendem Ergebnis ist kürzlich skizziert von den Herren Hardy und Littlewood in The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 48 (1919), Nr. 191 und inzwischen erschienen in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-physik. Klasse, 1920, S. 33—54.

[3]) A. a. O., S. 350.

[4]) Eine präzise Formulierung der Behauptung ist bei Waring nicht vorhanden.

Es sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \qquad (n \geqq 2)$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten a_ν *und mit* $a_n > 0$, *ferner sei* $f(x) \geqq 0$ *für jede ganze Zahl* $x \geqq 0$; *dann gibt es eine ganze Zahl* $N > 0$ *und zu jeder ganzen Zahl* $Z \geqq 0$ *solche ganzen Zahlen* $N' \geqq 0$, $N'' \geqq 0$, $x_1 \geqq 0, \ldots, x_{N'} \geqq 0$, *daß*

$$N' + N'' \leqq N$$

und

$$Z = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa) + N''$$

ist[5]); *d. h. jede ganze Zahl* $Z \geqq 0$ *ist unter Hinzunahme einer beschränkten Anzahl von Einheiten in eine beschränkte Anzahl der Polynomwerte zerfällbar.*

Diese Behauptung mag nach dem Vorbild von Herrn Maillet[6]) insofern etwas erweitert werden, als für die Koeffizienten a_ν auch solche *rationalen* (statt *ganzer*) Zahlen zugelassen werden sollen, für die $f(x)$ für jedes ganze x eine ganze Zahl ergibt (z. B. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$).

Bewiesen ist die Behauptung bisher nur für $n \leqq 5$ durch Herrn Maillet (a. a. O.). In dieser Arbeit soll sie allgemein bewiesen werden. Der Beweis wird sich ganz wesentlich auf eine andersartige Verallgemeinerung des Waring-Hilbertschen Satzes stützen, welche die simultane Zerfällung von Zahlen betrifft.

Es besteht folgender Satz:

Je zwei positive ganze Zahlen k, l, *welche die Bedingungen*

$$k \equiv l \pmod 2, \tag{1}$$

$$\frac{k^2}{4} \leqq l \leqq \frac{(k-1)^2}{3} \tag{2}$$

erfüllen, sind simultan in 5 *erste bzw. zweite Potenzen zerfällbar; d. h. es gibt* 5 *ganze Zahlen* $x_\varkappa \geqq 0$, *so daß zugleich*

$$k = x_1 + \ldots + x_5,$$
$$l = x_1^2 + \ldots + x_5^2$$

ist.

---

[5]) Für $N' = 0$ bedeute die Summe den Wert 0.

[6]) Journal de mathématiques pures et appliquées (5) 2 (1896), S. 363–380. Maillet beweist tatsächlich etwas mehr als oben angegeben. Er fordert nämlich nur, daß $f(x) \geqq 0$ für alle *hinreichend großen* x ist (dieser Wortlaut geht jedoch auch aus dem des Textes unmittelbar hervor), und gibt eine nur von n abhängende obere Schranke für N' explizite an; jedoch alles nur für $n \leqq 5$.

Der Satz ist in einem von Cauchy [7]) bewiesenen Satz über die simultane Zerfällbarkeit in 4 erste bzw. zweite Potenzen enthalten und sei, da er die Grundlage der folgenden Beweise bildet, hier nochmals, etwas unmittelbarer, bewiesen. Zunächst wird nach Cauchy gezeigt, daß je zwei positive ungerade Zahlen, die der Bedingung

$$(3) \qquad \frac{k^2}{4} \leqq l \leqq \frac{k^2}{3}$$

genügen, in 4 erste bzw. zweite Potenzen simultan zerfällbar sind. In der Tat besteht bei ungeradem k, l die Kongruenz $4l - k^2 \equiv 3 \pmod 8$; folglich gibt es ganze Zahlen x, y, z, über deren Vorzeichen noch verfügt werden kann, und für die $4l - k^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist. Da k, x, y, z sämtlich ungerade sind, ist einer der beiden Brüche $\frac{1}{4}(k + x + y + z)$ und $\frac{1}{4}(k - x - y - z)$ in Wirklichkeit eine ganze Zahl. Wir verfügen über die Vorzeichen von x, y, z so, daß der erste Bruch die ganze Zahl liefert. Dann sind

$$\tfrac{1}{4}(k + x + y + z), \qquad \tfrac{1}{4}(k + x - y - z),$$
$$\tfrac{1}{4}(k - x + y - z), \qquad \tfrac{1}{4}(k - x - y + z)$$

sämtlich ganz und, da nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung wegen (3)

$$|x| + |y| + |z| \leqq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3(4l - k^2)} \leqq \sqrt{4k^2 - 3k^2} = k$$

ist, sämtlich $\geqq 0$. Die Summe dieser 4 Zahlen ist aber k und die Summe ihrer Quadrate ist l. Damit ist die Zerfällung in 4 erste und zweite Potenzen bewiesen, aber zugleich auch der angeführte Satz über die Zerfällung in 5 erste und zweite Potenzen. Denn wegen (1) sind k und l entweder beide ungerade oder beide gerade. Im ersten Fall sind, da mit (2) auch (3) erfüllt ist, k und l in 4, also, da man 0 bzw. 0^2 additiv hinzufügen kann, auch in 5 erste und zweite Potenzen simultan zerfällbar. Im zweiten Fall sind $k - 1$ und $l - 1$ ungerade. Da auf Grund von (2) die Ungleichung (3) mit $k - 1$, $l - 1$ statt k, l erfüllt ist, sind $k - 1$ und $l - 1$ in 4 erste und zweite Potenzen simultan zerfällbar:

$$k - 1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \qquad l - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

also

$$k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1, \qquad l = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1^2,$$

womit alles bewiesen ist.

---

[7]) Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France 14 (1813–1815), S. 177–220; oder Œuvres complètes d'Augustin Cauchy (2) 6 (1887), S. 320–353.

Von Le Besgue[5]) rührt die Bemerkung her, daß für jede ganze Zahl $Z \geqq 0$ die Zahlen $6Z$ und $6Z^2$ simultan in 12 Quadrate und Biquadrate zerfällbar sind:

$$6Z = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2,$$
$$6Z^2 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{12}^4.$$

Herr Hilbert hat vor rund 10 Jahren in einem Seminar allgemein die Frage nach der simultanen Zerfällung von Zahlen in Potenzen ganzer Zahlen aufgeworfen; d. h. unter welchen möglichst geringen Einschränkungen für die zu zerfällenden Zahlen l_ν gibt es zu einer gegebenen ganzen Zahl $n \geqq 2$ eine positive ganze Zahl $N = N(n)$ von der Art, daß für je n positive ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche jenen Einschränkungen unterliegen, die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} l_1 = \sum\limits_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa, \\ l_2 = \sum\limits_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n = \sum\limits_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^n \end{cases}$$

sich simultan durch ganze Zahlen $x_\varkappa \geqq 0$ lösen lassen?

Zwei Arten von notwendigen Einschränkungen sind leicht anzugeben:

a) Bei den Bedingungen

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = l_1 \quad \text{und} \quad x_1 \geqq 0, \ldots, x_N \geqq 0$$

und unter Zulassung beliebiger reeller Werte für die $x_\varkappa$ innerhalb dieser Bedingungen ist

$$\frac{l_1^\nu}{N^{\nu-1}} \text{ der kleinste, } \quad l_1^\nu \text{ der größte Wert,}$$

den die Form $x_1^\nu + x_2^\nu + \ldots + x_N^\nu$ annehmen kann. Die l_ν müssen also Ungleichungen von der Gestalt

$$i_\nu l_1^\nu < l_\nu < J_\nu l_1^\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

erfüllen, wobei die i_ν, J_ν gewisse positive Zahlen $(0 < i_\nu < J_\nu)$ sind.

b) Außerdem müssen noch gewisse Kongruenzbedingungen erfüllt sein. Denn für jede Primzahl p und jede nicht durch p teilbare ganze Zahl x ist

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

[5]) Le Besgue, Exercices d'analyse numérique, Paris (1859), S. 112 ff.

also, falls überdies $p-1$ ein Teiler von $\nu-1$ ist,

$$x^{\nu-1}=(x^{p-1})^{\frac{\nu-1}{p-1}}\equiv 1^{\frac{\nu-1}{p-1}}=1 \pmod{p},$$

mithin für jedes ganze x

$$x^\nu \equiv x \pmod{p}.$$

Es muß daher*), damit eine Darstellung (4) möglich ist,

$$(5)\qquad l_\nu \equiv l_1 \pmod{p} \qquad (\nu=2,3,\ldots,n)$$

für jede Primzahl p sein, für die $p-1$ in $\nu-1$ aufgeht. Diese Bedingungen (5) sind z. B. erfüllt, wenn jedes l_ν durch jede dieser Primzahlen p teilbar ist. Es liegt daher nahe, bei der simultanen Zerfällung von Zahlen in Potenzen sich auf solche Zahlen l_ν zu beschränken, die durch bestimmte Zahlen teilbar sind.

Durch a) und b) ist gezeigt, von welcher Art ein Satz über simultane Zerfällung in Potenzen etwa sein kann. In Abschnitt I wird nun bewiesen werden:

Für jede ganze Zahl $n\geqq 2$ gibt es eine ganze Zahl $N=N(n)>0$, eine ganze Zahl $A>0$ und positive Zahlen i_1 und i_ν, J_ν:

$$0<i_\nu<J_\nu \qquad (\nu=2,3,\ldots,n)$$

von der Art, daß für je n durch A teilbare ganze Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_n$, welche die Ungleichungen

$$l_1>i_1;\quad i_\nu l_1^\nu<l_\nu<J_\nu l_1^\nu \qquad (\nu=2,3,\ldots,n)$$

erfüllen, die n Gleichungen

$$l_\nu=\sum_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

simultan durch ganze Zahlen $x_\varkappa\geqq 0$ lösbar sind.

Dieser Satz wird im folgenden als *Kernsatz* bezeichnet. Sein Beweis gelingt ohne Benutzung des Waring-Hilbertschen Satzes, liefert diesen aber offenbar mit. Mit Hilfe des Kernsatzes wird in Abschnitt II dann der auf S. 2 oben formulierte Satz bewiesen.

I.

Der Kernsatz über simultane Zerfällung.

Dem Beweise des Kernsatzes werden zwei Hilfssätze vorausgeschickt. Der erste von diesen liefert ein System von n Identitäten 2., 4., …, $2n$-ten Grades statt der einen Identität $2n$-ten Grades in Hilberts Beweis der

*) Dieses sind jedoch nicht die einzigen notwendigen Kongruenzbedingungen.

Waringschen Behauptung. Ähnlich wie bei Hilberts Beweis auf Grund der dort abgeleiteten Identität von der Zerfällung in n-te Potenzen auf die Zerfällung in $2n$-te geschlossen wird, ist hier aus dem System der n Identitäten von der simultanen Zerfällung in $1., \ldots, n$-te Potenzen ein Schluß auf die simultane Zerfällung in $2., 4., \ldots, 2n$-te Potenzen möglich. — Der zweite Hilfssatz wird in dem Hauptbeweise mehrfach (zuerst auf S. 17) verwendet und daher hier gesondert bewiesen. Durch ihn wird es ermöglicht, bei dem Schluß von einer simultanen Zerfällung in $1., \ldots, n$-te Potenzen auf eine simultane Zerfällung bis zur $2n$-ten Potenz auch die *un*geraden Exponenten mitzuerfassen.

Hilfssatz 1. *Es sei n eine ganze Zahl $\geqq 2$; dann gibt es dazu Zahlen*

$$N \text{ ganz}, > 0;$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ ganz}, > 0;$$

$$r_\varkappa \text{ ganz}, > 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, N);$$

$$a_{\varkappa\lambda} \text{ ganz} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, N;\ \lambda = 1, 2, 3, 4)$$

von der Art, daß folgende n Identitäten in $x_1, \ldots, x_4$ mit denselben Zahlen $N, r_\varkappa, a_{\varkappa\lambda}$ bestehen:

$$A_\nu(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^\nu = \sum_{\varkappa=1}^{N} r_\varkappa (a_{\varkappa 1}x_1 + a_{\varkappa 2}x_2 + a_{\varkappa 3}x_3 + a_{\varkappa 4}x_4)^{2\nu}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Beweis[10]): Nach Hilbert[11]) gibt es für jedes ganze $n \geqq 2$ eine ganze Zahl $N > 0$, rationale Zahlen $s_\varkappa > 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, N)$ und ganze Zahlen $b_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa = 1, \ldots, N;\ \lambda = 1, \ldots, 5)$, unter denen alle $b_{\varkappa 5} \neq 0$ sind, von der Art, daß identisch in $x_1, \ldots, x_5$

$$(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^n = \sum_{\varkappa=1}^{N} s_\varkappa (b_{\varkappa 1}x_1 + \ldots + b_{\varkappa 5}x_5)^{2n}$$

ist. Wird hierin $x_5 = x$, $s_\varkappa b_{\varkappa 5}^{2n} = t_\varkappa$, $\dfrac{b_{\varkappa\lambda}}{b_{\varkappa 5}} = c_{\varkappa\lambda}$ gesetzt, so entsteht die Identität

---

[10]) Dieser Beweis ist eine Abkürzung meines ursprünglichen längeren Beweises auf Grund von Bemerkungen, die ich den Herren Landau und Neder verdanke.

[11]) Math. Ann. 67 (1909), S. 283, Satz II; zwar ergibt sich aus dem Wortlaut dieses Satzes bei Hilbert noch nicht, daß in den Linearformen rechts die Koeffizienten einer der Veränderlichen, etwa von x_5, sämtlich $\neq 0$ gewählt werden können; doch wird dieses später (S. 290) ebenfalls bewiesen. Wohl den einfachsten Beweis für die im Text verwendete Identität ergibt die Abhandlung von Hausdorff in den Math. Ann. 67 (1909), S. 301–305, wenn in dieser auf S. 304, 3. Zeile, vor „sind" die Worte „und überdies $\neq 0$" eingefügt werden. Es werden dann sogar *alle* $b_{\varkappa\lambda} \neq 0$.

$$(x_1^2+\ldots+x_4^2+x^2)^n=\sum_{\varkappa=1}^{N} t_\varkappa (c_{\varkappa 1}x_1+\ldots+c_{\varkappa 4}x_4+x)^{2n},$$

in der die $t_\varkappa$ rationale Zahlen >0 und die $c_{\varkappa\lambda}$ rationale Zahlen sind.

Diese Identität werde nun (für $\mu=1,2,\ldots,n-1$) 2μ-mal nach x differenziert, und dann werde $x=0$ gesetzt. Da

$$\left[\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}}(\alpha+x^2)^n\right]_{x=0}=\left[\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}}\sum_{\lambda=0}^{n}\binom{n}{\lambda}x^{2\lambda}\alpha^{n-\lambda}\right]_{x=0}=\binom{n}{\mu}(2\mu)!\,\alpha^{n-\mu}$$

ist, ergeben sich so (es ist $\alpha=x_1^2+\ldots+x_4^2$ zu setzen) zusammen mit der ursprünglichen folgende n Identitäten mit denselben $t_\varkappa$ und $c_{\varkappa\lambda}$:

$$\binom{n}{\mu}(2\mu)!\,(x_1^2+\ldots+x_4^2)^{n-\mu}=\frac{(2n)!}{(2n-2\mu)!}\sum_{\varkappa=1}^{N}t_\varkappa(c_{\varkappa 1}x_1+\ldots+c_{\varkappa 4}x_4)^{2n-2\mu}$$
$$(\mu=0,1,\ldots,n-1).$$

Es bezeichne C den Hauptnenner aller $c_{\varkappa\lambda}$ und T den Hauptnenner aller $t_\varkappa\cdot(2n)!$. Wird $c_{\varkappa\lambda}\cdot C=a_{\varkappa\lambda}$, $t_\varkappa\cdot(2n)!\cdot T=r_\varkappa$ gesetzt, so sind $a_{\varkappa\lambda}$ ganze Zahlen, $r_\varkappa$ ganze Zahlen >0, und die Identitäten gehen über in

$$(2n-2\mu)!\binom{n}{\mu}(2\mu)!\;TC^{2n-2\mu}(x_1^2+\ldots+x_4^2)^{n-\mu}$$
$$=\sum_{\varkappa=1}^{N}r_\varkappa(a_{\varkappa 1}x_1+\ldots+a_{\varkappa 4}x_4)^{2n-2\mu}\qquad(\mu=0,1,\ldots,n-1).$$

Setzt man hierin endlich $\nu=n-\mu$, $A_\nu=(2\nu)!\binom{n}{n-\nu}(2n-2\nu)!\,TC^{2\nu}$, so erhält man die behaupteten Identitäten.

Hilfssatz 2. *Es sei τ eine ganze Zahl $\geqq 1$, und es seien die Zahlen $0<g<G$ gegeben. Dann gibt es zu diesen Zahlen τ, g, G Zahlen*

(1) $$0<f<F;\quad 0<f'<F';\quad Y_0>0,$$

so daß für jedes ganze $Y>Y_0$ und je zwei ganze Zahlen u, v aus den Intervallen

$$fY^{2\tau+1}<u<FY^{2\tau+1},$$
$$f'Y^{2\tau}<v<F'Y^{2\tau}$$

die Gleichungen

$$u=Yr+(Y+1)s+2Yt,$$
$$v=r+s+t$$

simultan durch ganze Zahlen r, s, t aus den Intervallen

$$gY^{2\tau}<r<GY^{2\tau},$$
$$g(Y+1)^{2\tau}<s<G(Y+1)^{2\tau},$$
$$g(2Y)^{2\tau}<t<G(2Y)^{2\tau}$$

lösbar sind.

Beweis: Es gibt zu τ, g, G eine Zahl γ $(0 < \gamma < 1)$, für die

$$g + 4^\tau G < G + 4^\tau G\gamma$$

ist. Es werde

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(g + G)$$

gesetzt. Dann ist

$$0 < g + \alpha + 4^\tau G < G + \alpha + 4^\tau G\gamma;$$

mithin gibt es eine Zahl $f' = f'(\tau, g, G) > 0$, so daß

$$g + \alpha + 4^\tau G < f' < G + \alpha + 4^\tau G\gamma$$

ist. Ferner gibt es eine Zahl $F' = F'(\tau, g, G)$, so daß

$$f' < F' < \operatorname{Min}(G + \alpha + 4^\tau G\gamma, f' + 4^{\tau-1} G(1-\gamma))$$

ist. Es werde weiter

$$\begin{aligned} f &= 4^\tau G\gamma + \operatorname{Min}(G + \alpha + 4^\tau G\gamma, f' + 4^{\tau-1} G(1-\gamma)), \\ F &= f' + G(4^\tau - 1 + \gamma) \end{aligned}$$

gesetzt. Dann sind auch f, F allein durch τ, g, G festgelegt, und es ist

$$\begin{aligned} F - f &\geqq f' + G(4^\tau - 1 + \gamma) - 4^\tau G\gamma - f' - 4^{\tau-1} G(1-\gamma) \\ &= G(1-\gamma)(4^\tau - 4^{\tau-1} - 1) > 0. \end{aligned}$$

Die Zahlen f, F, f', F' erfüllen mithin die Ungleichungen unter (1). Es wird behauptet, daß sie auch die anderen im Hilfssatz angegebenen Eigenschaften haben. Für den Beweis wird auf folgende aus dem Obigen sich ergebende Ungleichungen hingewiesen:

$$\begin{aligned} &F - f' = G(4^\tau - 1 + \gamma) < 4^\tau G; \\ &f - F' > 4^\tau G\gamma; \\ &2F' - f - \alpha = F' - \alpha - (f - F') < G + 4^\tau G\gamma - 4^\tau G\gamma = G; \\ &2f' - F - \alpha = f' - \alpha - (F - f') > g + 4^\tau G - 4^\tau G = g. \end{aligned}$$

Es möge nun eine ganze Zahl s so gewählt werden, daß

$$s \equiv u \pmod{Y} \quad \text{und} \quad \alpha Y^{2\tau} \leqq s \leqq \alpha Y^{2\tau} + Y$$

ist. Wegen $\alpha = \frac{1}{2}(g + G)$ liegt diese Zahl s für alle hinreichend großen Y (die Schranke, die Y überschreiten muß, hängt nur von τ, g, G ab) sicher in dem vorgeschriebenen Intervall. Es werde

$$t = \frac{u - s}{Y} - v$$

gesetzt. Dann ist t ganz und

$$\begin{aligned} t &> fY^{2\tau} - \alpha Y^{2\tau-1} - 1 - F'Y^{2\tau} = (f - F')Y^{2\tau} + o(Y^{2\tau})\text{[12]} \\ &> 4^\tau G\gamma Y^{2\tau} + o(Y^{2\tau}) > \{(4^\tau - 1)G + g\} Y^{2\tau} + o(Y^{2\tau}) \\ &= 4^\tau g Y^{2\tau} + (4^\tau - 1)(G - g) Y^{2\tau} + o(Y^{2\tau}) > g(2Y)^{2\tau} \end{aligned}$$

[12]) Es bezeichne $o(Y^\kappa)$ eine Funktion, die, durch Y^κ dividiert, für $Y \to \infty$ den Limes 0 hat.

für alle hinreichend großen Y. Ferner ist

$$t < FY^{2\nu} - f'Y^{2\nu} < 4^\nu G Y^{2\nu} = G(2Y)^{2\nu};$$

t liegt also für alle hinreichend großen Y ebenfalls in dem vorgeschriebenen Intervall, und es ist

$$u = s + Yt + Yv.$$

Endlich werde

$$r = v - s - t = 2v - \frac{u}{Y} - s\frac{Y-1}{Y}$$

gesetzt. Dann ist

$$v = r + s + t,$$
$$u = Yr + (Y+1)s + 2Yt,$$

und auch r liegt für alle großen Y in dem vorgeschriebenen Intervall; denn es ist

$$r > 2f'Y^{2\nu} - FY^{2\nu} - \alpha Y^{2\nu} - Y = (2f' - F - \alpha)Y^{2\nu} - Y > gY^{2\nu}$$

für alle großen Y; und

$$r < 2F'Y^{2\nu} - fY^{2\nu} - \alpha Y^{2\nu} + \alpha Y^{2\nu-1} + 1 = (2F' - f - \alpha)Y^{2\nu} + \alpha Y^{2\nu-1} + 1$$
$$< GY^{2\nu}$$

für alle großen Y.

Nunmehr wenden wir uns dem Beweis des Kernsatzes (S. 5) zu. Dieser Satz kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Zu jeder ganzen Zahl $n \geq 2$ gibt es eine ganze Zahl $N = N(n) > 0$, n positive ganze Zahlen $A_1, \ldots, A_n$ und reelle Zahlen k_1 und k_ν, K_ν:

$$0 < k_\nu < K_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

von der Art, daß für je n ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche die Ungleichungen

$$(2) \qquad l_1 > k_1; \quad k_\nu l_1^\nu < l_\nu < K_\nu l_1^\nu \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

erfüllen, die n Gleichungen

$$(3) \qquad l_\nu = \frac{1}{A_\nu}\sum_{\kappa=1}^{N} x_\kappa^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

simultan durch ganze Zahlen $x_\kappa \geq 0$ lösbar sind.

Daß dieser Satz aus dem zuerst formulierten (S. 5) folgt, ist klar (man setze in dem eben formulierten Satz $A_1 = \ldots = A_n = A$, $k_1 = \frac{i_1}{A}$ und $k_\nu = i_\nu A^{\nu-1}$, $K_\nu = J_\nu A^{\nu-1}$ für $\nu = 2, \ldots, n$; dann sind die l_ν der ersten Fassung die $A_\nu l_\nu$ der zweiten Fassung). Daß aber auch aus diesem Satz der zuerst formulierte folgt, läßt sich so einsehen: Dieser zweite Satz sagt aus, daß für je n ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche die Ungleichungen (2) erfüllen, die Zahlen $A_1 l_1, \ldots, A_n l_n$ simultan in N 1-te, …, n-te Potenzen zerfällbar sind; d. h. je n bzw. durch $A_1, \ldots, A_n$

teilbare ganze Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind simultan in N 1-te, ..., n-te Potenzen zerfällbar, wenn

$$\lambda_1 > A_1 k_1; \quad \frac{k_\nu A_\nu}{A_1^\nu} \lambda_1^\nu < \lambda_\nu < \frac{K_\nu A_\nu}{A_1^\nu} \lambda_1^\nu \qquad (\nu = 2, \ldots, n) \tag{4}$$

ist. Daher sind erst recht je n durch $A = A_1 A_2 \cdots A_n$ teilbare ganze Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ simultan in N 1-te, ..., n-te Potenzen zerfällbar, wenn diese λ_ν die Ungleichungen (4) erfüllen. Das ist aber der erste Satz mit λ_ν statt l_ν und mit $i_1 = A_1 k_1$ und $i_\nu = \frac{k_\nu A_\nu}{A_1^\nu}$, $J_\nu = \frac{K_\nu A_\nu}{A_1^\nu}$ für $\nu = 2, \ldots, n$.

Der Beweis wird für den Kernsatz in der zweiten Fassung geführt werden. Es mag dabei, wenn n Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ simultan in der Gestalt (3) darstellbar sind, hierfür zur Abkürzung

$$l_\nu = \frac{1}{A_\nu} \sum\nolimits_N^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

geschrieben werden.

Für $n = 2$ ist der Satz (in der ersten Fassung) mit $N = 5$, $A = 2$, $i_1 = 7$, $i_2 = \frac{1}{4}$, $J_2 = \frac{1}{2} - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \frac{1}{12})$ in dem Satz von S. 2 u. enthalten. Allgemein wird der Satz durch Induktion bewiesen. Er sei also für eine ganze Zahl $n \geqq 2$ richtig. Es soll gezeigt werden, daß er dann auch für $2n$ statt n und damit natürlich auch für alle Zahlen $< 2n$ richtig ist.

Den Ausgangspunkt für den Beweis bildet die Binomialformel. Aus dieser folgen für $\mu = 1, 2, \ldots, 2n$ die $2n$ Identitäten in Y und y_ϱ:

$$\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]} \binom{\mu}{2\nu} Y^{\mu-2\nu} y_\varrho^{2\nu} = \tfrac{1}{2}\{(Y + y_\varrho)^\mu + (Y - y_\varrho)^\mu\}.$$

Für alle Zahlen

$$M, M', Y \text{ ganz und } > 0; \qquad y_\varrho \text{ ganz und } 0 \leqq y_\varrho \leqq Y \tag{5}$$

ist daher

$$M' Y^\mu + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]} \binom{\mu}{2\nu} Y^{\mu-2\nu} \sum_{\varrho=1}^{M} y_\varrho^{2\nu} \tag{6}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big\{2 M' Y^\mu + \sum_{\varrho=1}^{M} (Y + y_\varrho)^\mu + \sum_{\varrho=1}^{M} (Y - y_\varrho)^\mu\Big\} = \tfrac{1}{2} \sum\nolimits_{2(M+M')}^{\mu}$$

$$(\mu = 1, \ldots, 2n).$$

Nun ist nach unserer Annahme der Kernsatz für n richtig; d. h. (nach der ersten Fassung von S. 5) für je n positive ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, die sämtlich durch eine gewisse Zahl A teilbar sind und die Ungleichungen

$$l_1 > i_1; \quad i_\nu l_1^\nu < l_\nu < J_\nu l_1^\nu \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

erfüllen, gibt es simultane Darstellungen

$$l_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Da die $x_\varkappa \geqq 0$ und ganz sind, lassen sie sich in 4 Quadrate ganzer Zahlen zerlegen:

$$x_\varkappa = x_{\varkappa 1}^2 + \cdots + x_{\varkappa 4}^2.$$

Auf Grund des Hilfssatzes 1 gibt es daher positive ganze Zahlen N', A_ν, $r_{\varkappa'}$ und ganze Zahlen $a_{\varkappa' \lambda}$, so daß für $\nu = 1, \ldots, n$

$$(7) \qquad \begin{aligned} A_\nu l_\nu &= \sum_{\varkappa=1}^{N} A_\nu (x_{\varkappa 1}^2 + \cdots + x_{\varkappa 4}^2)^\nu \\ &= \sum_{\varkappa=1}^{N} \sum_{\varkappa'=1}^{N'} r_{\varkappa'} (a_{\varkappa' 1} x_{\varkappa 1} + \cdots + a_{\varkappa' 4} x_{\varkappa 4})^{2\nu} \end{aligned}$$

ist[13]). Wir bestimmen nun die Zahlen M, y_ϱ in (6) folgendermaßen: Es soll

$$M = \sum_{\varkappa=1}^{N} \sum_{\varkappa'=1}^{N'} r_{\varkappa'},$$

$$y_\varrho = |a_{\varkappa' 1} x_{\varkappa 1} + \cdots + a_{\varkappa' 4} x_{\varkappa 4}|$$

gesetzt werden, wobei jeder Ausdruck rechts $r_{\varkappa'}$-mal aufzuführen ist. Die Gleichungen (7) schreiben sich dann

$$(8) \qquad A_\nu l_\nu = \sum_{\varrho=1}^{M} y_\varrho^{2\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Wird nun noch $Y \geqq \sqrt{A_1 l_1}$ gewählt, so ist wegen (8)

$$Y^2 \geqq y_1^2 + \cdots + y_M^2 \geqq y_\varrho^2 \qquad (\varrho = 1, \ldots, M),$$

also die letzte Ungleichung von (5) erfüllt. Es ergibt sich somit unter Berücksichtigung von (8) als Folge von (6):

Zu der Zahl n gibt es Zahlen

$$M, A, A_1, \ldots, A_n \textit{ ganz}, > 0; \quad i_1 > 0; \quad 0 < i_\nu < J_\nu \quad (\nu = 2, \ldots, n)$$

von folgender Art: für je n durch A teilbare ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche die Ungleichungen

$$(9) \qquad l_1 > i_1; \quad i_\nu l_1^\nu < l_\nu < J_\nu l_1^\nu \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

[13]) Damit ist offenbar unter der Annahme der Richtigkeit des Kernsatzes über die simultane Zerfällung in 1-te, ..., n-te Potenzen die Richtigkeit des entsprechenden Satzes (in der zweiten Fassung) über die simultane Zerfällung in 2-te, 4-te, ..., $2n$-te Potenzen dargetan.

erfüllen und für jede ganze Zahl $Y \geqq \sqrt{A_1 l_1}$ und jede positive ganze Zahl M' ist[14])

$$(10)\quad (M+M')Y^\mu + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]} \binom{\mu}{2\nu} Y^{\mu-2\nu} l_\nu A_\nu = \frac{1}{2} \sum\nolimits_{2(M+M')}^{\mu} \quad (\mu=1,\ldots,2n).$$

Hieraus werden wir nun in mehreren Schritten den vollständigen Beweis entwickeln. Dabei wird vorerst die linke Seite von (10) so umgeformt werden, daß das letzte Glied der linken Seite jeder Gleichung für sich genommen sämtliche ganzen Zahlen eines Intervalls darstellen kann, dessen Grenzen von Y abhängen. Zu dem Zweck wird zunächst das genannte Glied in ein einfacheres übergeführt; sodann werden die Intervallgrenzen der l_ν von Y statt von l_1 abhängig gemacht, endlich wird eine neue Gleichung hergeleitet (Schritt 1 bis 3).

Erster Schritt: Das letzte Glied $\binom{\mu}{2\left[\frac{\mu}{2}\right]} Y^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} A_{\left[\frac{\mu}{2}\right]}$ in (10) wird in ein Glied der Form $Y^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l_{\left[\frac{\mu}{2}\right]}$ übergeführt.

Der Koeffizient von $Y^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l_{\left[\frac{\mu}{2}\right]}$ im letzten Gliede der linken Seite von (10) ist

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für gerades } \mu: & A_{\frac{\mu}{2}} \\ \text{für ungerades } \mu: & \mu A_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} \end{array}\right\} \quad (\mu=2,3,\ldots,2n).$$

Es sollen nun für $l_1, \ldots, l_n$ Zahlen genommen werden, die nicht nur durch A, sondern noch durch andere Zahlen teilbar sind, und zwar werde gesetzt

$$l_\nu = \frac{(2n+2)!}{(2\nu+2)!} A A_{\nu+1} A_{\nu+2} \cdots A_n \lambda_\nu\text{[15])} \qquad (\nu=1,\ldots,n),$$

wobei λ_ν eine ganze Zahl bedeutet. Aus (10) und (9) folgt dann

$$(11)\quad (M+M')Y^\mu + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]} \binom{\mu}{2\nu} \frac{(2n+2)!}{(2\nu+2)!} A A_\nu A_{\nu+1} \cdots A_n Y^{\mu-2\nu} \lambda_\nu$$
$$= \frac{1}{2} \sum\nolimits_{2(M+M')}^{\mu} \qquad (\mu=1,\ldots,2n)$$

für

$$Y^2 \geqq \frac{(2n+2)!}{4!} A A_1 A_2 \cdots A_n \lambda_1 = \mathsf{A} \lambda_1,$$

---

[14]) Es bedeute in dieser Arbeit stets $\sum_{\nu=1}^{0}$ den Wert 0.

[15]) Für $\nu = n$ bedeute $A_{\nu+1} A_{\nu+2} \cdots A_n$ die Zahl 1.

$$\lambda_1 > \frac{4!\, i_1}{(2n+2)!\, A A_2 \cdots A_n} = h_1,$$

$$\lambda_\nu > i_\nu \frac{(2\nu+2)!}{(2n+2)!\, A A_{\nu+1} \cdots A_n} \left(\frac{(2n+2)!\, A A_2 \cdots A_n}{4!}\right)^\nu \lambda_1^\nu = h_\nu \lambda_1^\nu,$$

$$\lambda_\nu < J_\nu \frac{(2\nu+2)!}{(2n+2)!\, A A_{\nu+1} \cdots A_n} \left(\frac{(2n+2)!\, A A_2 \cdots A_n}{4!}\right)^\nu \lambda_1^\nu = H_\nu \lambda_1^\nu,$$

wobei die λ_ν hinsichtlich der Teilbarkeit durch eine andere Zahl keiner Einschränkung mehr unterliegen. In jeder der Gleichungen (11) ist nunmehr für $\mu \geqq 4$ in der Summe links jeder der „Koeffizienten"

$$\binom{\mu}{2\nu} \frac{(2n+2)!}{(2\nu+2)!} A A_\nu A_{\nu+1} \cdots A_n \quad \left(\nu = 1, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1\right)$$

durch den letzten „Koeffizienten"

$$\binom{\mu}{2\left[\frac{\mu}{2}\right]} \frac{(2n+2)!}{\left(2\left[\frac{\mu}{2}\right]+2\right)!} A A_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} A_{\left[\frac{\mu}{2}\right]+1} \cdots A_n$$

teilbar. Es werde nun noch die ganze Zahl M' (etwa möglichst klein, jedoch $\geqq 0$) so gewählt, daß $M + M'$ durch $(2n+2)!\, A A_1 \cdots A_n$ teilbar ist; dann ist $M + M'$ auch durch den letzten „Koeffizienten" jeder der Gleichungen (11) mit $\mu \geqq 2$ teilbar, und M' hängt nur von n ab. Wird nun jede der Gleichungen (11), außer der ersten, durch ihren letzten Koeffizienten, die erste durch $M + M'$ dividiert, so erhält man[16])

$$b_{\mu 0} Y^\mu + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} Y^{\mu-2\nu} \lambda_\nu + Y^{\mu - 2\left[\frac{\mu}{2}\right]} \lambda_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} = \frac{1}{B_\mu} \sum\nolimits_{2(M+M')}^{\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, 2n),$$

wobei die $b_{\mu\nu}$ und B_μ gewisse positive ganze Zahlen bedeuten, die nur von n, ν und μ, jedenfalls nicht von den λ_ν und Y abhängen. Wird nun wieder l_ν statt λ_ν geschrieben und $2(M + M') = P$ gesetzt, so läßt sich das bisher gewonnene Resultat wie folgt formulieren:

Zu der Zahl n gibt es Zahlen

P *ganz*, > 0; $B_1, \ldots, B_{2n}$ *ganz*, > 0;

$b_{\mu\nu}$ *ganz*, > 0 $\quad \left(\mu = 1, \ldots, 2n;\ \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1\right)$;

$\mathsf{A} > 0$; $h_1 > 0$; $0 < h_\nu < H_\nu$ $\quad (\nu = 2, \ldots, n)$

von folgender Art: für je n ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, die den Ungleichungen

(12a) $\quad l_1 > h_1; \quad h_\nu l_1^\nu < l_\nu < H_\nu l_1^\nu \quad (\nu = 2, \ldots, n)$

---

[16]) Es bedeute hier und im folgenden b_{10} die Zahl 1 sowie $\sum\limits_{\nu=1}^{-1}$ und λ_0 die Zahl 0.

genügen, und für jede positive ganze Zahl Y mit

(12b) $$Y^2 > \mathsf{A}\, l_1$$

ist[17])

(13) $$b_{\mu 0} Y^\mu + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} Y^{\mu-2\nu} l_\nu + Y^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} = \frac{1}{B_\mu} \sum\nolimits_P^\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, 2n).$$

Zweiter Schritt: Abänderung der Ungleichungen (12a, b).

Es lassen sich wegen $0 < h_\nu < H_\nu$ offenbar zwei Zahlen g_1, G_1 so wählen, daß

$$0 < g_1 < G_1 < \frac{1}{\mathsf{A}},$$

$$\frac{G_1}{g_1} < \operatorname*{Min}_{\nu=2,3,\ldots,n} \sqrt[\nu]{\frac{H_\nu}{h_\nu}}$$

ist. Es werde

$$g_0 = \frac{h_1}{g_1}; \quad g_\nu = h_\nu G_1^\nu, \quad G_\nu = H_\nu g_1^\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

gesetzt. Dann ist $g_\nu < G_\nu$ $(\nu = 2, \ldots, n)$ und für

(14a) $$Y^2 > g_0$$

und je n ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche die Ungleichungen

(14b) $$g_\nu Y^{2\nu} < l_\nu < G_\nu Y^{2\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen, auch

$$Y^2 > \frac{l_1}{G_1} > \mathsf{A}\, l_1,$$

also (12b) erfüllt und

$$l_1 > g_1 Y^2 > g_1 g_0 = h_1,$$

$$h_\nu l_1^\nu = \frac{g_\nu}{G_1^\nu} l_1^\nu < g_\nu Y^{2\nu} < l_\nu < G_\nu Y^{2\nu} < \frac{G_\nu}{g_1^\nu} l_1^\nu = H_\nu l_1^\nu,$$

also auch (12a) erfüllt; d. h. die Ungleichungen (12a, b) können durch (14a, b) ersetzt werden. Somit ist bewiesen:

Zu der Zahl n gibt es Zahlen

P *ganz*, > 0; $B_1, \ldots, B_{2n}$ *ganz*, > 0;

$b_{\mu\nu}$ *ganz*, > 0 $\left(\mu = 1, \ldots, 2n; \;\; \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1\right)$;

$g_0 > 0$; $0 < g_\nu < G_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$

von folgender Art: für jede positive ganze Zahl Y mit

(14a) $$Y^2 > g_0$$

[17]) Es sei hier und im folgenden $l_0 = 0$.

und je n ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, die den Ungleichungen

$$g_\nu Y^{2\nu} < l_\nu < G_\nu Y^{2\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{14b}$$

genügen, ist

$$b_{\mu 0} Y^\mu + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} Y^{\mu-2\nu} l_\nu + Y^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} = \frac{1}{B_\mu} \sum\nolimits_P^\mu \tag{13}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Dritter Schritt: Herleitung einer anderen Gleichung aus (13).

Das letzte Glied der linken Seite jeder der Gleichungen (13) mit ungeradem μ enthält den Faktor Y, kann also nur durch Y teilbare Zahlen darstellen. Um diese Einschränkung zu beseitigen, ersetzen wir in dem eben gewonnenen Resultat Y, l_ν bzw. durch $Y+1, l'_\nu$ und $2Y, l''_\nu$ und addieren die so entstehenden Gleichungen (13). Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} b_{\mu 0}\{Y^\mu + (Y+1)^\mu + (2Y)^\mu\} &+ \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu}\{Y^{\mu-2\nu} l_\nu + (Y+1)^{\mu-2\nu} l'_\nu + (2Y)^{\mu-2\nu} l''_\nu\} \\ &+ \left\{Y^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} + (Y+1)^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l'_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} + (2Y)^{\mu-2\left[\frac{\mu}{2}\right]} l''_{\left[\frac{\mu}{2}\right]}\right\} \\ &= \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_P^\mu + \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_P^\mu + \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_P^\mu = \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_{3P}^\mu . \end{aligned}$$

Wird noch $3P = Q$ gesetzt, so läßt sich das bisher Bewiesene folgendermaßen zusammenfassen:

Zu der Zahl n gibt es Zahlen

Q *ganz*, > 0; $B_1, \ldots, B_{2n}$ *ganz*, > 0;

$b_{\mu\nu}$ *ganz*, > 0 $\qquad \left(\mu = 1, \ldots, 2n;\ \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1\right)$;

$g_0 > 0$; $0 < g_\nu < G_\nu$ $\qquad (\nu = 1, \ldots, n)$

von folgender Art: für je $3n+1$ positive ganze Zahlen Y; $l_1, \ldots, l_n$; $l'_1, \ldots, l'_n$; $l''_1, \ldots, l''_n$, welche die Bedingungen

$$\left.\begin{cases} Y^2 > g_0, \\ g_\nu Y^{2\nu} < l_\nu < G_\nu Y^{2\nu}, \\ g_\nu (Y+1)^{2\nu} < l'_\nu < G_\nu (Y+1)^{2\nu}, \\ g_\nu (2Y)^{2\nu} < l''_\nu < G_\nu (2Y)^{2\nu} \end{cases}\right\} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

erfüllen, ist, wenn

$$\begin{cases} X_{\mu 0} = Y^\mu + (Y+1)^\mu + (2Y)^\mu & (\mu = 1, \ldots, 2n), \\ X_{\mu\nu} = Y^{\mu-2\nu} l_\nu + (Y+1)^{\mu-2\nu} l'_\nu + (2Y)^{\mu-2\nu} l''_\nu & \end{cases} \tag{16}$$

$$\left(\mu = 2, 3, \ldots, 2n;\ \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right]\right)$$

gesetzt wird[18]),

$$(17)\qquad \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} X_{\mu\nu} + X_{\mu,\left[\frac{\mu}{2}\right]} = \frac{1}{B_\mu} \sum\nolimits_Q^{\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, 2n).$$

Die Richtung der beiden nächsten Schritte wird durch folgende Überlegung bestimmt: Betrachten wir die linke Seite einer *einzelnen* Zeile von (17) (mit Ausnahme der ersten) *gesondert*, so ist klar, daß das letzte Glied $X_{\mu,\left[\frac{\mu}{2}\right]}$, das ausführlich $l_{\frac{\mu}{2}} + l'_{\frac{\mu}{2}} + l''_{\frac{\mu}{2}}$ bei geradem μ und $Y l_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} + (Y+1) l'_{\left[\frac{\mu}{2}\right]} + 2 Y l''_{\left[\frac{\mu}{2}\right]}$ bei ungeradem μ lautet, bei festem Y jede ganze Zahl darstellen kann, wenn die l, l', l'' auf kein Intervall beschränkt sind. Bei der vorliegenden Intervallbeschränkung für die l, l', l'' werden nur Zahlen eines gewissen von Y abhängenden Intervalls dargestellt. Andererseits ist es auch möglich, ein von Y abhängendes Intervall anzugeben, dessen ganze Zahlen sämtlich unter Einhaltung der für die l, l', l'' vorgeschriebenen Bedingungen durch das letzte Glied dargestellt werden können. Bei der *gleichzeitigen* Betrachtung des *gesamten* Systems (17) tritt die Schwierigkeit auf, daß in der 2ϱ-ten und $(2\varrho+1)$-ten Zeile der Zahlenwert des letzten Gliedes durch *dieselben* Größen $l_\varrho, l'_\varrho, l''_\varrho$ bestimmt ist. Fassen wir nun jede 2ϱ-te Zeile mit der folgenden (sofern eine solche vorhanden) zu einem Zeilenpaar zusammen, so werden sich jedoch auf Grund von Hilfssatz 2 von Y abhängende Intervalle der erforderlichen Länge so festlegen lassen, daß je 2 ganze Zahlen aus ihnen durch die letzten Glieder eines Zeilenpaars unter Einhaltung der für die l_ϱ, l'_ϱ, l''_ϱ vorgeschriebenen Bedingungen simultan darstellbar sind. Mit Rücksicht auf den weiteren Gang des Beweises werden dabei gleichzeitig die Intervalle der durch die letzten Glieder darstellbaren Zahlen so gewählt, daß in jeder Zeile die Schwankung der linken Seite ohne das letzte Glied kleiner ist als die Länge des durch das letzte Glied darstellbaren Zahlenintervalls. Das wird möglich sein, wenn man beachtet, daß in jeder Zeile die $X_{\mu\nu}$ mit $\nu < \left[\frac{\mu}{2}\right]$ durch die l, l', l'' in den letzten Gliedern der vorhergehenden Zeilenpaare bestimmt sind. Man hat nur, von der letzten Zeile anfangend zu den früheren fortschreitend, die durch die letzten Glieder eines Zeilenpaares darstellbaren Zahlenintervalle so klein zu wählen, daß die zur Darstellung benötigten Zahlen l, l', l'' sicher in Intervallen liegen, deren Längen nur einen hinreichend kleinen Bruchteil der Länge der durch die letzten Glieder aller späteren Zeilen dargestellten Intervalle ausmachen.

---

[18]) Für $\mu = 1$ bedeute die linke Seite $b_{10} X_{10}$.

Vierter Schritt: Festlegung von Bereichen ganzer Zahlen, welche durch die $X_{\mu,\left[\frac{\mu}{2}\right]}$ dargestellt werden können, unter gleichzeitiger Abschätzung der übrigen $X_{\mu\nu}$.

Wir fangen mit der letzten Zeile von (17), d. h. mit $X_{2n,n}$ an. Es ist klar: Es gibt Zahlen

$$0 < f_{2n} < F_{2n},$$

so daß für alle hinreichend großen ganzen Y jede ganze Zahl z_{2n} des Intervalls

$$f_{2n} Y^{2n} < z_{2n} < F_{2n} Y^{2n}$$

in der Form

$$z_{2n} = l_n + l'_n + l''_n = X_{2n,n}$$

unter Einhaltung der Bedingungen (15) darstellbar ist. Denn man setze z. B.

$$f_{2n} = g_n(1 + 2^{2n}) + \tfrac{1}{2}(g_n + G_n); \quad F_{2n} = g_n(1 + 2^{2n}) + G_n.$$

Wählt man dann

$$l_n = [g_n Y^{2n}] + 1, \qquad l''_n = [g_n (2Y)^{2n}] + 1,$$

so ist (15) für l_n und l''_n bei allen hinreichend großen Y erfüllt; es ist aber auch

$$\begin{aligned} l'_n = z_{2n} - l_n - l''_n &> \{g_n(1 + 2^{2n}) + \tfrac{1}{2}(g_n + G_n)\} Y^{2n} - g_n Y^{2n} - 1 - g_n(2Y)^{2n} - 1 \\ &= \tfrac{1}{2}(g_n + G_n) Y^{2n} - 2 > g_n (Y+1)^{2n} \end{aligned}$$

für alle hinreichend großen Y, und es ist

$$\begin{aligned} l'_n &< \{g_n(1 + 2^{2n}) + G_n\} Y^{2n} - g_n Y^{2n} - g_n (2Y)^{2n} \\ &= G_n Y^{2n} < G_n (Y+1)^{2n}. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu dem vorhergehenden Zeilenpaar in (17) und müssen dabei dafür sorgen, daß $l_{n-1}, l'_{n-1}, l''_{n-1}$ die Ungleichungen (15) in einer so weit eingeschränkten Gestalt erfüllen, daß das von diesen 3 Zahlen abhängende $X_{2n,n-1}$ eine hinreichend geringe Schwankung hat. Wir wenden zu dem Zweck Hilfssatz 2 an auf

$$\begin{aligned} &\tau = n - 1, \quad g = g_{n-1}, \quad G = \mathrm{Min}\left(G_{n-1}, g_{n-1} + \frac{F_{2n} - f_{2n}}{4^{2n} \cdot 2n\, b_{2n,n-1}}\right), \\ &r = l_{n-1}, \qquad s = l'_{n-1}, \qquad t = l''_{n-1}. \end{aligned}$$

Dann gibt es nach dem Hilfssatz zu τ, g, G, d. h. zu der Zahl n solche Zahlen $f = f_{2n-1}$, $F = F_{2n-1}$, $f' = f_{2n-2}$, $F' = F_{2n-2}$ $(0 < f_{2n-1} < F_{2n-1};$ $0 < f_{2n-2} < F_{2n-2})$, daß für jede hinreichend große ganze Zahl Y und je zwei ganze Zahlen z_{2n-1}, z_{2n-2} aus den Intervallen

$$f_{2n-1} Y^{2n-1} < z_{2n-1} < F_{2n-1} Y^{2n-1}, \qquad f_{2n-2} Y^{2n-2} < z_{2n-2} < F_{2n-2} Y^{2n-2}$$

die Gleichungen

$$z_{2n-1} = Y l_{n-1} + (Y+1) l'_{n-1} + 2Y l''_{n-1} \qquad \left(= X_{2n-1,\left[\frac{2n-1}{2}\right]}\right),$$

$$z_{2n-2} = l_{n-1} + l'_{n-1} + l''_{n-1} \qquad \left(= X_{2n-2,\left[\frac{2n-2}{2}\right]}\right)$$

ganzzahlig in l_{n-1}, l'_{n-1}, l''_{n-1} lösbar sind, und zwar so, daß (15) für $\nu = n-1$ erfüllt und überdies

$$g_{n-1} Y^{2n-2} < l_{n-1} < \left(g_{n-1} + \frac{F_{2n} - f_{2n}}{4^{2n} \cdot 2n\, b_{2n,n-1}}\right) Y^{2n-2},$$

$$g_{n-1}(Y+1)^{2n-2} < l'_{n-1} < \left(g_{n-1} + \frac{F_{2n} - f_{2n}}{4^{2n} \cdot 2n\, b_{2n,n-1}}\right)(Y+1)^{2n-2},$$

$$g_{n-1}(2Y)^{2n-2} < l''_{n-1} < \left(g_{n-1} + \frac{F_{2n} - f_{2n}}{4^{2n} \cdot 2n\, b_{2n,n-1}}\right)(2Y)^{2n-2},$$

also (man multipliziere die erste dieser 3 Zeilen mit Y^2, die zweite mit $(Y+1)^2$, die dritte mit $(2Y)^2$ und addiere) nach (16)

$$g_{n-1} X_{2n,0} < X_{2n,n-1} < g_{n-1} X_{2n,0} + \frac{F_{2n} - f_{2n}}{4^{2n} \cdot 2n\, b_{2n,n-1}} X_{2n,0}$$

ist.

Für das nächstvorhergehende Zeilenpaar wird der Hilfssatz angewendet auf

$$\tau = n-2, \quad g = g_{n-2}, \quad G = \operatorname{Min}\left(G_{n-2},\ g_{n-2} + \operatorname*{Min}_{\varkappa=0,1,2} \frac{F_{2n-\varkappa} - f_{2n-\varkappa}}{4^{2n}(2n-\varkappa)\, b_{2n-\varkappa,n-2}}\right),$$

$$r = l_{n-2}, \quad s = l'_{n-2}, \quad t = l''_{n-2}.$$

Dann gibt es nach dem Hilfssatz zu τ, g, G, d. h. zu der Zahl n solche Zahlen $f = f_{2n-3}$, $F = F_{2n-3}$, $f' = f_{2n-4}$, $F' = F_{2n-4}$ $(0 < f_{2n-3} < F_{2n-3};$ $0 < f_{2n-4} < F_{2n-4})$, daß für jede hinreichend große ganze Zahl Y und je zwei ganze Zahlen z_{2n-3}, z_{2n-4} aus den Intervallen

$$f_{2n-3} Y^{2n-3} < z_{2n-3} < F_{2n-3} Y^{2n-3}, \qquad f_{2n-4} Y^{2n-4} < z_{2n-4} < F_{2n-4} Y^{2n-4}$$

die Gleichungen

$$z_{2n-3} = Y l_{n-2} + (Y+1) l'_{n-2} + 2Y l''_{n-2} \qquad \left(= X_{2n-3,\left[\frac{2n-3}{2}\right]}\right),$$

$$z_{2n-4} = l_{n-2} + l'_{n-2} + l''_{n-2} \qquad \left(= X_{2n-4,\left[\frac{2n-4}{2}\right]}\right)$$

ganzzahlig in l_{n-2}, l'_{n-2}, l''_{n-2} lösbar sind, und zwar so, daß (15) für $\nu = n-2$ erfüllt und überdies

$$g_{n-2} X_{2n-\varkappa,0} < X_{2n-\varkappa,n-2} < g_{n-2} X_{2n-\varkappa,0} + \frac{F_{2n-\varkappa} - f_{2n-\varkappa}}{4^{2n}(2n-\varkappa)\, b_{2n-\varkappa,n-2}} X_{2n-\varkappa,0}$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2)$$

ist.

In dieser Weise wird der Hilfssatz weiter angewendet, und zwar allgemein auf

$$\tau = n - \sigma, \quad g = g_{n-\sigma}, \quad G = \operatorname{Min}\left(G_{n-\sigma}, \, g_{n-\sigma} + \operatorname*{Min}_{\varkappa=0,1,\ldots,2\sigma-2} \frac{F_{2n-\varkappa} - f_{2n-\varkappa}}{4^{2n}(2n-\varkappa) b_{2n-\varkappa, n-\sigma}}\right),$$
$$r = l_{n-\sigma}, \quad s = l'_{n-\sigma}, \quad t = l''_{n-\sigma}$$

für $1 \leqq \sigma \leqq n-1$. Dann gibt es nach dem Hilfssatz zu τ, g, G, d. h. zu der Zahl n solche Zahlen $f = f_{2n-2\sigma+1}$, $F = F_{2n-2\sigma+1}$, $f' = f_{2n-2\sigma}$, $F' = F_{2n-2\sigma}$ $(0 < f_{2n-2\sigma+1} < F_{2n-2\sigma+1}; \; 0 < f_{2n-2\sigma} < F_{2n-2\sigma})$, daß für jede hinreichend große ganze Zahl Y und je zwei ganze Zahlen $z_{2n-2\sigma+1}$, $z_{2n-2\sigma}$ aus den Intervallen

$$f_{2n-2\sigma+1} Y^{2n-2\sigma+1} < z_{2n-2\sigma+1} < F_{2n-2\sigma+1} Y^{2n-2\sigma+1},$$
$$f_{2n-2\sigma} Y^{2n-2\sigma} < z_{2n-2\sigma} < F_{2n-2\sigma} Y^{2n-2\sigma}$$

die Gleichungen

$$z_{2n-2\sigma+1} = Y l_{n-\sigma} + (Y+1) l'_{n-\sigma} + 2Y l''_{n-\sigma} \quad \left(= X_{2n-2\sigma+1, \left[\frac{2n-2\sigma+1}{2}\right]}\right),$$
$$z_{2n-2\sigma} \;=\; l_{n-\sigma} + \quad l'_{n-\sigma} \quad + l''_{n-\sigma} \quad \left(= X_{2n-2\sigma, \left[\frac{2n-2\sigma}{2}\right]}\right)$$

ganzzahlig in $l_{n-\sigma}$, $l'_{n-\sigma}$, $l''_{n-\sigma}$ lösbar sind, und zwar so, daß (15) für $\nu = n - \sigma$ erfüllt und überdies für $\varkappa = 0, 1, \ldots, 2\sigma - 2$

$$(18) \qquad g_{n-\sigma} X_{2n-\varkappa, 0} < X_{2n-\varkappa, n-\sigma} < g_{n-\sigma} X_{2n-\varkappa, 0} + \frac{F_{2n-\varkappa} - f_{2n-\varkappa}}{4^{2n}(2n-\varkappa) b_{2n-\varkappa, n-\sigma}} X_{2n-\varkappa, 0}$$

ist.

Dieses Verfahren kann durchgeführt werden für $\sigma = 1, \ldots, n-1$. Da (18) für $\varkappa = 0, 1, \ldots, 2\sigma - 2$ gilt, so kommt jedes $X_{\mu\nu}$ von (17) außer dem ersten und letzten einer Zeile, d. h. jedes $X_{\mu\nu}$ $(\mu = 4, 5, \ldots, 2n;$ $\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1)$ in der Form $X_{2n-\varkappa, n-\sigma}$ in den Ungleichungen (18) vor, ist also abgeschätzt. Berücksichtigt man ferner, daß die Zahlen

$$X_{\mu\nu} = Y^{\mu-2\nu} l_\nu + (Y+1)^{\mu-2\nu} l'_\nu + (2Y)^{\mu-2\nu} l''_\nu$$

für $1 \leqq \nu \leqq \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1$ und $\mu \leqq 2n$ (außer durch μ, ν) allein durch Y, l_ν, l'_ν, l''_ν bestimmt sind, also außer von Y allein von $z_{2\nu}$, $z_{2\nu+1}$ abhängen, so ist, da die Indizes $2n - 2\sigma + 1$ und $2n - 2\sigma$ der Zahlen z für $\sigma = 1, \ldots, n-1$ gerade die Zahlen $\mu = 2, 3, \ldots, 2n-1$ ergeben, folgendes bewiesen:

Zu der Zahl n gibt es Zahlen

Q ganz, > 0; $B_1, \ldots, B_{2n}$ ganz, > 0;

$b_{\mu\nu}$ ganz, > 0 $\qquad \left(\mu = 1, \ldots, 2n; \; \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1\right);$

$f_0 > 0$; $0 < f_\mu < F_\mu$ $(\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$; $g_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$

von folgender Art: Wird

$$X_{\mu 0} = Y^\mu + (Y+1)^\mu + (2Y)^\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, 2n)$$

gesetzt, so gibt es für jedes ganze $Y > f_0$, *wenn die* $2n-1$ *ganzen Zahlen* $z_2, z_3, \ldots, z_{2n}$ *in den Intervallen*

$$f_\mu Y^\mu < z_\mu < F_\mu Y^\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

liegen, zu je zweien $z_{2\nu}$, $z_{2\nu+1}$ ($\nu = 1, \ldots, n-1$) *dieser Zahlen solche positiven ganzen Zahlen* $X_{\mu\nu}$ ($\mu = 2\nu+2, \ldots, 2n$), *die nur von* Y *und* $z_{2\nu}$, $z_{2\nu+1}$ *abhängen*[19]), *daß*[20])

$$\text{(19)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} X_{\mu\nu} + z_\mu = \frac{1}{B_\mu} \sum\nolimits_{Q}^{\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n)$$

und

$$\text{(20)} \qquad g_\nu X_{\mu 0} < X_{\mu\nu} < g_\nu X_{\mu 0} + \frac{F_\mu - f_\mu}{4^{2n} \mu b_{\mu\nu}} X_{\mu 0} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 4, 5, \ldots, 2n \\ \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\mu}{2}\right] - 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Fünfter Schritt: Abschätzung der Summe auf der linken Seite von (19).

Es werde

$$X_\mu = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} X_{\mu\nu} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n),$$

$$b_\mu = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} g_\nu \text{ [21])} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

gesetzt. Dann ist jedes X_μ eine ganze Zahl, die außer von den $b_{\mu\nu}$ und Y, d. h. außer von n und Y nur noch von $X_{\mu 1}, \ldots, X_{\mu, \left[\frac{\mu}{2}\right]-1}$, d. h. von den Zahlen $z_2, z_3, \ldots, z_{2\left[\frac{\mu}{2}\right]-1}$ abhängt.

Ferner folgt aus (20) für $\mu = 4, 5, \ldots, 2n$

$$\begin{aligned} X_\mu &> \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} g_\nu X_{\mu 0} = b_\mu X_{\mu 0} = b_\mu \{Y^\mu + (Y+1)^\mu + (2Y)^\mu\} \\ &> b_\mu (2 + 2^\mu) Y^\mu . \end{aligned}$$

---

[19]) An die frühere Bedeutung der $X_{\mu\nu}$ braucht für $\nu > 0$ nicht mehr gedacht zu werden.

[20]) Für $\mu = 1$ bedeute die linke Seite $b_{10} X_{10}$.

[21]) Es bedeute nunmehr g_0 die Zahl 1.

Da für $\mu = 2, 3$
$$X_\mu = b_{\mu 0} X_{\mu 0}$$
ist, so gilt die Schlußungleichung offenbar auch für $\mu = 2, 3$. Weiter folgt aus (20) für $\mu = 4, 5, \ldots, 2n$
$$X_\mu < \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} g_\nu X_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]-1} b_{\mu\nu} \frac{F_\mu - f_\mu}{4^{2n} \mu b_{\mu\nu}} X_{\mu 0} < \left\{b_\mu + \frac{F_\mu - f_\mu}{4^{2n} \mu}(\mu - 1)\right\} X_{\mu 0},$$
also wegen
$$X_{\mu 0} = Y^\mu + (Y+1)^\mu + (2Y)^\mu$$
bei gegebenem $\varepsilon_\mu > 0$ für alle hinreichend großen Y und $\mu = 4, 5, \ldots, 2n$
$$X_\mu < \left\{b_\mu + \frac{F_\mu - f_\mu}{4^{2n}}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right\}(2 + 2^\mu + \varepsilon_\mu) Y^\mu$$
$$= b_\mu(2 + 2^\mu) Y^\mu + \left\{(F_\mu - f_\mu)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{2+2^\mu}{4^{2n}} + \varepsilon_\mu\left(b_\mu + \frac{F_\mu - f_\mu}{4^{2n}}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right)\right\} Y$$
Da $\frac{2+2^\mu}{4^{2n}} < 1$ für $\mu = 4, \ldots, 2n$ ist, so kann ε_μ (unabhängig von den z_ν) so gewählt werden, daß
$$\varepsilon_\mu\left(b_\mu + \frac{F_\mu - f_\mu}{4^{2n}}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right) < (F_\mu - f_\mu)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(1 - \frac{2+2^\mu}{4^{2n}}\right) \quad (\mu = 4, 5, \ldots, 2n)$$
ist. Dann ist für alle hinreichend großen Y
$$X_\mu < b_\mu(2 + 2^\mu) Y^\mu + (F_\mu - f_\mu)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) Y^\mu \qquad (\mu = 4, 5, \ldots, 2n).$$
Diese Abschätzung gilt aber auch, wie nachträglich wieder leicht einzusehen, für $\mu = 2, 3$.

Wird nun noch
$$e_\mu = b_\mu(2 + 2^\mu) \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$
gesetzt und berücksichtigt, daß $b_{10} = 1$, also $b_{10} X_{10} = 4Y + 1$ ist, so ist bewiesen:

Zu der Zahl n gibt es Zahlen

Q ganz, > 0; $B_1, \ldots, B_{2n}$ ganz, > 0;

$E > 0$; $e_\mu > 0$ $(\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$; $0 < f_\mu < F_\mu$ $(\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$

von folgender Art: Es sei $Y > E$ eine ganze Zahl,
$$X_1 = 4Y + 1,$$
und es mögen die $2n - 1$ Zahlen $z_2, z_3, \ldots, z_{2n}$ irgendwelche ganzen Zahlen aus den Intervallen
$$f_\mu Y^\mu < z_\mu < F_\mu Y^\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

sein; zu den Zahlen z_μ gibt es dann ganze Zahlen $X_\mu > 0$ ($\mu = 2, 3, \ldots, 2n$) *mit folgenden drei Eigenschaften*[22]):

a) *Jedes X_μ ist allein durch Y, z_2, z_3, ..., $z_{2\left[\frac{\mu}{2}\right]-1}$ bestimmt*[23]), *und es ist*

b) $e_\mu Y^\mu < X_\mu < e_\mu Y^\mu + (F_\mu - f_\mu)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) Y^\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n),$

c) $X_\mu + z_\mu = \frac{1}{B_\mu} \sum_{\varrho}^{\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n)$ [24]).

Sechster Schritt: Auf Grund der Eigenschaft a), nach der jedes X_μ durch die z_ν *früherer* Zeilen von c) festgelegt ist, und der Ungleichungen b) kann nun gezeigt werden, daß die linken Seiten von c) (mit Ausnahme der ersten Zeile) für alle hinreichend großen Y jede ganze Zahl innerhalb gewisser von Y abhängender Grenzen darstellen können.

Genauer gesagt, soll folgendes bewiesen werden: Es sei $Y > E$, und es seien $Z_2, Z_3, \ldots, Z_{2n}$ irgendwelche ganzen Zahlen, die den Ungleichungen[25])

$$\left(e_\mu + \frac{f_\mu + (\mu-1)F_\mu}{\mu}\right) Y^\mu < Z_\mu < (e_\mu + F_\mu) Y^\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

genügen; es soll gezeigt werden, daß sich ganze Zahlen z_μ und mit ihnen ganze Zahlen X_μ schrittweise so festlegen lassen, daß sie den Bedingungen des am Schluß des fünften Schrittes formulierten Satzes genügen und

$$Z_\mu = X_\mu + z_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

ist.

Das wird durch Schluß von μ auf $\mu + 1$ bewiesen.

Für $\mu = 2$ ist (vgl. Anm. 23) schon allein durch Y eine Zahl X_2 festgelegt, und es ist für diese nach dem Satz von Schritt 5

$$e_2 Y^2 < X_2 < e_2 Y^2 + \tfrac{1}{2}(F_2 - f_2) Y^2;$$

z_2 ist noch in keiner Weise festgelegt. Wird nun

$$z_2 = Z_2 - X_2$$

gesetzt, so ist

$$z_2 > \left(e_2 + \tfrac{1}{2}(f_2 + F_2)\right) Y^2 - e_2 Y^2 - \tfrac{1}{2}(F_2 - f_2) Y^2 = f_2 Y^2,$$

$$z_2 < (e_2 + F_2) Y^2 - e_2 Y^2 = F_2 Y^2;$$

---

22) An die frühere Bedeutung der X_μ braucht nicht mehr gedacht zu werden.

23) X_2, X_3 hängen natürlich von keinem z_ν ab, sondern nur von Y.

24) Es sei $z_1 = 0$.

25) E sei so groß gewählt, daß es ganze Zahlen $Z_2, \ldots, Z_{2n}$ gibt, die den Ungleichungen genügen.

d. h. für $\mu = 2$ lassen sich z_2, X_2 so festlegen, daß diese Zahlen die Bedingungen des Satzes von Schritt 5 erfüllen und

$$Z_2 = X_2 + z_2$$

ist.

Es seien nun die Zahlen z_μ, X_μ gemäß unserer Behauptung schon festgelegt bis $\mu = \mu' < 2n$; dann lassen sich auch die Zahlen $z_{\mu'+1}$, $X_{\mu'+1}$ in der geforderten Weise festlegen. Denn da $2\left[\frac{\mu'+1}{2}\right] - 1 \leqq \mu'$ ist, sind die gemäß Schritt 5 die Zahl $X_{\mu'+1}$ bestimmenden Zahlen $Y, z_2, \ldots, z_{2\left[\frac{\mu'+1}{2}\right]-1}$ in den schon festgelegten Zahlen $Y, z_2, \ldots, z_{\mu'}$ enthalten. $X_{\mu'+1}$ ist daher schon festgelegt. Über $z_{\mu'+1}$ kann dagegen noch verfügt werden. Es werde

$$z_{\mu'+1} = Z_{\mu'+1} - X_{\mu'+1}$$

gesetzt. Da $X_{\mu'+1}$ die Ungleichung b), d. h.

$$e_{\mu'+1} Y^{\mu'+1} < X_{\mu'+1} < e_{\mu'+1} Y^{\mu'+1} + (F_{\mu'+1} - f_{\mu'+1})\left(1 - \frac{1}{\mu'+1}\right) Y^{\mu'+1}$$

erfüllt, ist

$$z_{\mu'+1} > \left(e_{\mu'+1} + \frac{f_{\mu'+1} + \mu' F_{\mu'+1}}{\mu'+1}\right) Y^{\mu'+1} - e_{\mu'+1} Y^{\mu'+1}$$

$$- (F_{\mu'+1} - f_{\mu'+1})\left(1 - \frac{1}{\mu'+1}\right) Y^{\mu'+1} = f_{\mu'+1} Y^{\mu'+1},$$

$$z_{\mu'+1} < (e_{\mu'+1} + F_{\mu'+1}) Y^{\mu'+1} - e_{\mu'+1} Y^{\mu'+1} = F_{\mu'+1} Y^{\mu'+1};$$

d. h. auch die Zahlen $z_{\mu'+1}$, $X_{\mu'+1}$ lassen sich so festlegen, daß sie die Bedingungen des Satzes von Schritt 5 erfüllen und

$$Z_{\mu'+1} = X_{\mu'+1} + z_{\mu'+1}$$

ist.

Damit ist dieser Induktionsschluß beendet, und es ist, wenn

$$d_\mu = e_\mu + \frac{f_\mu + (\mu - 1) F_\mu}{\mu}, \quad D_\mu = e_\mu + F_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

gesetzt wird, bewiesen:

Zu der Zahl n gibt es Zahlen

$$Q \textit{ ganz}, > 0, \quad B_1, \ldots, B_{2n} \textit{ ganz}, > 0;$$

$$d_1 > 0; \quad 0 < d_\mu < D_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2)$$

von folgender Art: Für jede ganze Zahl $Y > d_1$, für

$$Z_1 = 4Y + 1$$

und je $2n - 1$ ganze Zahlen $Z_2, Z_3, \ldots, Z_{2n}$, die den Ungleichungen[26])

---

[26]) Mit Rücksicht auf das Folgende sei d_1 so groß, daß für jedes $Y > d_1$ stets ganze Zahlen $Z_2, \ldots, Z_{2n}$ vorhanden sind, die den Ungleichungen genügen.

$$d_\mu Y^\mu < Z_\mu < D_\mu Y^\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

genügen, ist

$$Z_\mu = \frac{1}{B_\mu} \sum_Q^\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Abschluß des Beweises: Das eben formulierte Ergebnis unterscheidet sich von dem hier zu beweisenden (Kernsatz in der Fassung von S. 9 mit $2n$ statt n) im wesentlichen nur noch durch die Einschränkung $Z_1 \equiv 1 \pmod 4$. Von dieser Einschränkung (und von dem Buchstaben Y) soll das Resultat nun befreit werden.

Es sei Y_0 eine feste (etwa die kleinste) ganze Zahl, die $> d_1$ ist, es sei

$$Z_{10} = 4 Y_0 + 1,$$

und es seien $Z_{\mu 0}$ $(\mu = 2, \ldots, 2n)$ irgendwelche (etwa die kleinsten) ganzen Zahlen, die den Ungleichungen

$$d_\mu Y_0^\mu < Z_{\mu 0} < D_\mu Y_0^\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

genügen. Dann ist

$$Z_{\mu 0} = \frac{1}{B_\mu} \sum_Q^\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Nun sei ζ_1 eine beliebige ganze Zahl > 0, und es seien $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_{2n}$ ganze Zahlen, die den Ungleichungen

$$\frac{2 d_\mu + D_\mu}{3 \cdot 4^\mu} \zeta_1^\mu < \zeta_\mu < \frac{d_\mu + 2 D_\mu}{3 \cdot 4^\mu} \zeta_1^\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

genügen. Es gibt dann eine ganze Zahl v, so daß

$$\zeta_1 \equiv 1 + v \pmod 4, \quad 0 \leqq v \leqq 3$$

ist. Es werde

$$Z_\mu = \zeta_\mu - v Z_{\mu 0} \qquad (\mu = 1, \ldots, 2n)$$

gesetzt. Dann ist $Z_1 \equiv 1 \pmod 4$, also $Y = \frac{1}{4}(Z_1 - 1)$ ganz und, wenn ζ_1 genügend groß ist, $> d_1$. Ferner ist für $\mu = 2, \ldots, 2n$

$$Z_\mu > \frac{2 d_\mu + D_\mu}{3 \cdot 4^\mu} \zeta_1^\mu - 3 D_\mu Y_0^\mu,$$

also, da $\zeta_1 \geqq Z_1 = 4Y + 1$ ist,

$$Z_\mu > \frac{2 d_\mu + D_\mu}{3 \cdot 4^\mu} (4Y + 1)^\mu - 3 D_\mu Y_0^\mu > d_\mu Y^\mu$$

für alle hinreichend großen Y oder, was auf dasselbe hinausläuft, für alle hinreichend großen ζ_1. Weiter ist

$$Z_\mu < \frac{d_\mu + 2 D_\mu}{3 \cdot 4^\mu} \zeta_1^\mu,$$

also, da $\zeta_1 \leqq Z_1 + 3Z_{10} = 4Y + 1 + 12Y_0 + 3$ ist,

$$Z_\mu < \frac{d_\mu + 2D_\mu}{3 \cdot 4^\mu}(4Y + 12Y_0 + 4)^\mu < D_\mu Y^\mu$$

für alle hinreichend großen Y oder für alle großen ζ_1.

Es erfüllen somit die hier festgelegten Zahlen $Z_1, \ldots, Z_{2n}$ für alle hinreichend großen ζ_1, etwa $\zeta_1 > C$ (wobei C nur von n abhängt) die Bedingungen des Ergebnisses von Schritt 6; daher ist

$$Z_\mu = \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_Q^\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

also

$$\zeta_\mu = Z_\mu + vZ_{\mu 0} = \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_Q^\mu + v \cdot \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_Q^\mu + (3 - v)\frac{1}{B_\mu}\sum_{\varkappa=1}^{Q} 0^\mu = \frac{1}{B_\mu}\sum\nolimits_{4Q}^\mu.$$

Damit ist der Kernsatz in seiner zweiten Fassung (S. 9) bewiesen mit $2n$ statt n, $N = 4Q$, $A_\mu = B_\mu$, $k_1 = C$, $k_\mu = \frac{2d_\mu + D_\mu}{3 \cdot 4^\mu}$, $K_\mu = \frac{d_\mu + 2D_\mu}{3 \cdot 4^\mu}$, $l_\mu = \zeta_\mu$; und damit ist der Induktionsbeweis beendet.

II.
Zerfällung in Polynomwerte.

Der in der Einleitung (S. 2 oben) formulierte Satz über die Zerfällung ganzer Zahlen in Polynomwerte (wobei zunächst das Polynom mit *ganzzahligen* Koeffizienten a_ν vorausgesetzt werde) wird nunmehr folgendermaßen bewiesen:

Nach dem Kernsatz (S. 5, es werde in diesem jedoch Al_ν statt der durch A teilbaren Zahlen l_ν und M statt N geschrieben) gibt es für je n ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, die den Bedingungen

$$Al_1 > i_1; \quad i_\nu A^{\nu-1} l_1^\nu < l_\nu < J_\nu A^{\nu-1} l_1^\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, 2n)$$

genügen, simultane Zerfällungen der Zahlen Al_ν:

$$Al_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{M} x_\varkappa^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Für die ersten $n - 1$ der Zahlen l_ν mögen nur die durch den höchsten Koeffizienten a_n des Polynoms teilbaren genommen werden. Dann ist, wenn wieder $l_1, \ldots, l_{n-1}$ statt $\frac{l_1}{a_n}, \ldots, \frac{l_{n-1}}{a_n}$ geschrieben wird,

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} Aa_n l_\nu &= \sum_{\varkappa=1}^{M} x_\varkappa^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1), \\ Al_n &= \sum_{\varkappa=1}^{M} x_\varkappa^n \end{aligned}\right.$$

für

$$l_1 > \frac{i_1}{A a_n} = i'_1,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & i'_\nu l_1^\nu = i_\nu A^{\nu-1} a_n^{\nu-1} l_1^\nu < l_\nu < J_\nu A^{\nu-1} a_n^{\nu-1} l_1^\nu = J'_\nu l_1^\nu \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1)^{97}), \\ & i l_1^n = i_n A^{n-1} a_n^n l_1^n < l_n < J_n A^{n-1} a_n^n l_1^n = J l_1^n. \end{aligned} \right.$$

Aus (1) folgt, wenn $a_n A = B$ gesetzt wird,

$$B a_\nu l_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{M} a_\nu x_\varkappa^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1),$$

$$B l_n = \sum_{\varkappa=1}^{M} a_n x_\varkappa^n,$$

also

$$(3) \qquad B(l_n + a_{n-1} l_{n-1} + \ldots + a_1 l_1) + M a_0 = \sum_{\varkappa=1}^{M} f(x_\varkappa).$$

Es gibt unabhängig von den l_ν eine ganze Zahl $M' > 0$, so daß B in $(M + M') a_0$ aufgeht. Da $a_0 = f(0)$ ist, folgt aus (3), falls $M + M' = N'$ gesetzt wird,

$$B\left(l_n + a_{n-1} l_{n-1} + \ldots + a_1 l_1 + \frac{N' a_0}{B}\right) = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa).$$

Es werde nun[98])

$$l_\nu = [J'_\nu l_1^\nu] - 1 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1)$$

gesetzt. Dann genügen diese l_ν für jedes hinreichend große l_1 den Ungleichungen (2), und es ist

$$a_{n-1} l_{n-1} + \ldots + a_1 l_1 + \frac{N' a_0}{B} = L(l_1)$$

eine ganze Zahl, die außer von festen Zahlen, die durch das Polynom gegeben sind, nur von l_1 abhängt, und es gibt eine ganze Zahl $H > 0$, so daß für alle l_1

$$|L(l_1)| < H l_1^{n-1}$$

ist. Es ist damit bisher bewiesen:

Es gibt zu dem gegebenen Polynom Zahlen N' ganz, > 0; B ganz, > 0; $H > 0$; $l_0 > 0$; $0 < i < J$ von folgender Art: Zu jedem $l_1 > l_0$ gibt es eine ganze Zahl $L = L(l_1)$, so daß

$$|L| < H l_1^{n-1}$$

---

[97]) Für $n = 2$ fällt diese Ungleichung fort.

[98]) Für $n = 2$ fällt diese Bestimmung der l_ν natürlich fort.

ist, und daß für alle ganzen Zahlen l_n des Intervalls

$$(4) \qquad i l_1^n < l_n < J l_1^n$$

eine Darstellung

$$(5) \qquad B(l_n + L(l_1)) = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa)$$

besteht.

Daraus folgt aber der Satz. Denn es werde $J' = \frac{1}{2}(i + J)$ gesetzt und, wenn ζ eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$l_1 = \left[\sqrt[n]{\frac{\zeta}{J'}}\right] + 1.$$

Dann ist

$$l_1 \leqq \sqrt[n]{\frac{\zeta}{J'}} + 1, \quad l_1 > \sqrt[n]{\frac{\zeta}{J'}},$$

also

$$J'(l_1 - 1)^n \leqq \zeta < J' l_1^n.$$

Für jedes hinreichend große l_1 oder, was auf dasselbe hinausläuft, für jedes hinreichend große ζ ist mit l_1 eine ganze Zahl $L(l_1)$ bestimmt, die der Ungleichung

$$|L(l_1)| < H l_1^{n-1}$$

genügt, und es ist für alle hinreichend großen l_1, mithin auch für alle hinreichend großen ζ,

$$i l_1^n < J'(l_1 - 1)^n - H l_1^{n-1} < \zeta - L(l_1) < J' l_1^n + H l_1^{n-1} < J l_1^n.$$

Die Zahl $l_n = \zeta - L(l_1)$ genügt also der Ungleichung (4), und daher folgt aus (5) für alle hinreichend großen ζ, etwa $\zeta \geqq K$, stets

$$B\zeta = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa),$$

also für alle ganzen $Z \geqq BK$

$$Z = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa) + b \qquad (0 \leqq b < B).$$

Daher gilt, wenn $BK + B + N' = N$ gesetzt wird, endlich für jedes ganze $Z > 0$ eine Darstellung

$$Z = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa) + N'' \quad \text{mit} \quad N' + N'' \leqq N.$$

Damit ist der Satz für ganze Koeffizienten bewiesen. Sind die Koeffizienten a_ν jedoch rationale Zahlen, so sei ihr Hauptnenner a. Dann

hat das Polynom $a \cdot f(x)$ ganzzahlige Koeffizienten, und für dieses gilt daher bei beliebigem ganzem $Z > 0$ eine Darstellung

$$aZ = \sum_{\varkappa=1}^{N'} a f(x_\varkappa) + N'',$$

also auch

$$Z = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa) + \frac{N''}{a},$$

wobei $\frac{N''}{a}$ eine ganze Zahl ist, da Z und die $f(x_\varkappa)$ ganz sind.

Hagen i. W., 15. Juni 1920.

(Eingegangen am 16. 7. 1920.)

Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten.

Von

Johann Radon in Hamburg.

Vor einigen Jahren wurde mir von dem Wiener Mathematiker E. Helly[1]) der folgende Satz mitgeteilt:

Notwendig und hinreichend dafür, daß konvexe Körper des n-dimensionalen Raumes in beliebiger Menge einen gemeinsamen Punkt besitzen, ist, daß je $n+1$ *Körper der Menge einen Punkt gemeinsam haben.*

Die wesentliche Schwierigkeit beim Beweise dieses Satzes liegt in seiner Bestätigung für konvexe Körper in endlicher Anzahl. Da es mir vor kurzem gelungen ist, diesen Punkt in sehr einfacher Weise zu erledigen[2]), so erlaube ich mir, den schönen Hellyschen Satz unter Darlegung meines Beweises mitzuteilen.

Zunächst ist festzustellen, daß unter einem *konvexen Körper* des R_n eine *beschränkte*, *abgeschlossene* und *konvexe Punktmenge* verstanden werden soll (die nicht notwendig innere Punkte zu besitzen braucht).

Im Falle einer *endlichen Anzahl* „konvexer Körper" genügt, wie aus dem Beweise hervorgehen wird, die Forderung der *Konvexität allein*. Im Falle einer unendlichen Menge ist die *Abgeschlossenheit* der „konvexen Körper" wesentlich, dagegen genügt es, wie wir sehen werden, die *Beschränktheit* nur von *einem* der Körper zu fordern, um den Hellyschen Satz zu sichern.

Wir beweisen zuerst den Hellyschen Satz für r Körper unter der

[1]) Seit 1915 in russischer Kriegsgefangenschaft.

Zusatz bei der Korrektur. Herr Dr. E. Helly ist Mitte November 1920 nach Wien zurückgekehrt; ein daraufhin erfolgter Briefwechsel mit dem Verfasser hat ergeben, daß der seinerzeit von Herrn Helly gefundene Beweis von dem des Verfassers wesentlich verschieden ist.

[2]) Ich habe diesen Beweis bei der 86. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Nauheim vorgetragen.

Annahme, daß er für $r-1 \geqq n+1$ Körper schon feststeht. Da für $n+1$ Körper die Aussage des Satzes trivial ist, haben wir damit den Beweis für jede endliche Menge erledigt.

Die Koordinaten eines Punktes x unseres R_n seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$, unsere konvexen Körper mögen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_r$ heißen.

Nach Voraussetzung haben die Körper $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{i-1}, \mathfrak{K}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{K}_r$ einen Punkt $x^{(i)}$ gemein $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Wir setzen die linearen Gleichungen an:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_k^{(i)} = 0 \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \\ &\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \quad = 0. \end{aligned}$$

Weil $r > n+1$, läßt sich ein reelles Lösungssystem $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ finden, das nicht aus lauter Nullen besteht. Wir bezeichnen die Indizes jener λ_i, die $\geqq 0$ sind, mit α, die der übrigen mit β und setzen $\lambda_\alpha = \mu_\alpha$, $\lambda_\beta = -\mu_\beta$. Dann sind die $\mu_i \geqq 0$ und verschwinden nicht sämtlich. Das System (1) läßt sich dann schreiben:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\sum_\alpha \mu_\alpha x_\alpha^{(k)} = \sum_\beta \mu_\beta x_\beta^{(k)} \\ &\sum_\alpha \mu_\alpha = \sum_\beta \mu_\beta (> 0). \end{aligned}$$

Wir setzen nun:

$$\frac{\sum_\alpha \mu_\alpha x_\alpha^{(k)}}{\sum_\alpha \mu_\alpha} = \frac{\sum_\beta \mu_\beta x_\beta^{(k)}}{\sum_\beta \mu_\beta} = \xi_k$$

Der so definierte Punkt ξ erscheint auf zweierlei Art als Schwerpunkt nicht negativer Massen, die einmal in den Punkten $x^{(\alpha)}$, dann in den Punkten $x^{(\beta)}$ angebracht sind. Nun gehört jedes $x^{(\alpha)}$ sicher allen $\mathfrak{K}_\beta$ an, wegen der Konvexität der Mengen $\mathfrak{K}_\beta$ gehört also auch ξ zu allen $\mathfrak{K}_\beta$. Ebenso sieht man, daß ξ allen $\mathfrak{K}_\alpha$ angehört, m. a. W. ξ ist allen $\mathfrak{K}_i$ gemein, womit der Beweis beendet ist.

Um nun zu unendlichen Mengen überzugehen, behandeln wir zuerst den Fall einer abzählbaren Menge $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ (die $\mathfrak{K}$ sind nunmehr abgeschlossen und beschränkt vorauszusetzen). Nach dem eben Bewiesenen ist unter den Voraussetzungen des Hellyschen Satzes der Durchschnitt $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_r$ nicht leer. Die $\mathfrak{A}_r$ sind also abgeschlossene, beschränkte, nicht leere Mengen, deren jede in der vorausgehenden enthalten ist, haben also einen Punkt gemein, der dann in allen $\mathfrak{K}_n$ vorkommt.

Liegt endlich eine beliebige Menge $\{\mathfrak{K}\}$ konvexer Körper vor, so bezeichne $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ die abzählbare Menge der konvexen Polyeder mit rationalen Ecken. Ferner verwenden wir das Blaschkesche „Nachbarschaftsmaß" $N(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ zweier konvexer Körper[3]). Es erfüllt die Entfernungsaxiome eines „metrischen Raumes" (Hausdorff[4])), wie schon daraus folgt, daß es mit Hausdorffs Entfernungsbegriff für abgeschlossene Punktmengen[5]) identisch ist.

Wir gehen nun die $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ der Reihe nach durch und wählen unter allen Körpern der Menge $\{\mathfrak{K}\}$, für welche $N(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{K}) < \frac{1}{n}$ ist, einen bestimmten $\mathfrak{K}_{i,n}$ aus, falls es überhaupt solche gibt. Man sieht sofort, daß die $\mathfrak{K}_{i,n}$ eine abzählbare Teilmenge von $\{\mathfrak{K}\}$ bilden, die wir mit $\mathfrak{K}_1^*, \mathfrak{K}_2^*, \ldots$ bezeichnen.

Nach dem früher Bewiesenen haben die $\mathfrak{K}_n^*$ sicher einen Punkt x gemein, sobald $\{\mathfrak{K}\}$ das Hellysche Kriterium erfüllt. Sei nun $\mathfrak{K}$ ein beliebiges Element von $\{\mathfrak{K}\}$. Wir können $\mathfrak{K}$ durch eine Folge $\mathfrak{P}_{n_1}, \mathfrak{P}_{n_2}, \ldots$ so approximieren, daß

$$N(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_{n_i}) < \frac{1}{i}.$$

Folglich existiert $\mathfrak{K}_{n_i, i} = \mathfrak{K}_{\nu_i}^*$ und nach dem Dreiecksaxiom der metrischen Räume gilt:

$$N(\mathfrak{K}_{\nu_i}^*, \mathfrak{K}) \leqq N(\mathfrak{K}_{n_i, i}, \mathfrak{P}_{n_i}) + N(\mathfrak{P}_{n_i}, \mathfrak{K}) < \frac{2}{i}.$$

Die Entfernung des Punktes x von $\mathfrak{K}$ ist daher auch $< \frac{2}{i}$, und weil i beliebig groß genommen werden kann, folgt, daß jeder Körper $\mathfrak{K}$ den Punkt x enthält. Damit ist der Beweis des Hellyschen Satzes erbracht.

Will man die Forderung der Beschränktheit bloß an einen Körper $\mathfrak{K}_1$ von $\{\mathfrak{K}\}$ stellen, so braucht man von vornherein bloß die Menge $\{\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\}$ zu betrachten und befindet sich in dem eben erledigten Falle.

---

[3]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 60.
[4]) Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 211.
[5]) Ebenda, S. 293.

(Eingegangen am 19. 10. 1920.)

Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers[1]).

Von

K. Reidemeister in Hamburg.

$\mathfrak{K}$ sei ein konvexer Körper mit der Oberfläche $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}$ eine Kugel mit dem Mittelpunkt P_0 und mit der Oberfläche $\mathfrak{O}$, welche $\mathfrak{K}$ im Innern enthält, und jedem Punkte P von $\mathfrak{R}$ sei umkehrbar eindeutig ein Punkt π von $\mathfrak{O}$ durch Projektion von P_0 aus, der im Innern von $\mathfrak{K}$ liege, zugeordnet. *Dann ist das Lebesguesche Maß der Punktmenge* $\mathfrak{f}$ *in* $\mathfrak{O}$, *welche alle und nur die Punkte* π_k *und* π_e *enthält, die Bildpunkte von Kantenpunkten* P_k *und Eckpunkten* P_e *sind, gleich null.*

Zunächst seien folgende Zeichen eingeführt: Die einem jeden Kantenpunkt P_k zugeordnete ausgezeichnete Gerade, welche allen Stützebenen durch P_k gemeinsam ist, heiße g_k. Der Winkel der Extremalstützebenen durch P_k, welche $\mathfrak{K}$ enthält, heißt α_k. Die abzählbar vielen Geraden durch einen Eckpunkt P_e, welche sämtliche Kantenpunkte aus der Oberfläche des Projektionsraumes von P_e enthalten, mögen mit $g_{e1}, g_{e2}, \ldots$, die bzw. zu diesen Geraden gehörigen Winkel der Extremalstützebenen mit $\alpha_{e1}, \alpha_{e2}, \ldots$ bezeichnet werden. Es gibt nur endlich viele $\alpha_{en} < \alpha_0 < 180°$.

Der Beweis beruht im wesentlichen auf den beiden folgenden Sätzen:
1. Konvergiert die Punktfolge $P_1, P_2, \ldots$ gegen P und ist $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von Stützebenen von P_1, P_2 usw., so sind die *Häufungselemente* der Folge $a_1, a_2, \ldots$ *Stützebenen durch* P; und zwar solche, *die mindestens eine Gerade mit dem Projektionsraummantel von* P *gemeinsam haben.*

2. Ist $P_1, P_2, \ldots$ eine Folge gegen P konvergierender Punkte, deren Projektionsräume je mindestens eine g_k oder g_{e1} enthalten, sind diesen Geraden $g_1, g_2, \ldots$ bzw. die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zugeordnet und bleibt

[1]) Über die Nomenklatur vgl. Minkowski, „Zur Theorie der konvexen Körper" (§ 13–15), Ges. Werke 2, S. 161–170. Vgl. ferner W. Blaschke, „Kreis und Kugel" 1916, S. 82.

stets $\alpha_n \leqq \alpha_0$, so *muß auch* P mindestens *eine* g_k (oder g_{en}) *besitzen, der ein Winkel* $\alpha \leqq \alpha_0$ *zugeordnet ist* und die *Häufungselement der Menge* $g_1, g_2, \ldots$ *ist.*

Der erste Satz leuchtet unmittelbar ein, der zweite läßt sich leicht aus dem ersten folgern.

Sei nunmehr $\mathfrak{f}_1$ die Menge derjenigen Punkte in $\mathfrak{O}$, welche Bildpunkte von solchen P_k und P_e sind, die mindestens eine g_k bzw. g_{en} mit den zugeordneten Winkeln α_k bzw. α_{en} besitzen derart, daß $\alpha_k \leqq \alpha_1$, $\alpha_{en} \leqq \alpha_1 < 180^0$ ist. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{f}_1$ abgeschlossen. Sei π_k das Bild eines P_k und γ_k der Hauptkreis durch π_k, der durch die durch P_0 und g_k gehende Ebene auf $\mathfrak{O}$ ausgeschnitten wird. Seien β_k und β'_k zwei weitere Hauptkreise durch π_k, welche mit γ_k den spitzen Winkel ε bilden. Der Winkelraum (β_k, β'_k), der γ_k enthält, heiße Winkelraum (1), der komplementäre Winkelraum (2). Dann kann ich zu jedem ε ein größtes ϱ_k so bestimmen, daß innerhalb der mit dem Radius ϱ_k um π_k geschlagenen Kugel alle Punkte von $\mathfrak{f}_1$ innerhalb des Winkelraumes (1) liegen. Denn angenommen, es gäbe in (2) eine Folge $P_1, P_2, \ldots$ aus $\mathfrak{f}_1$, die gegen P_k konvergierte, so müßten sich $g_1, g_2, \ldots$ nach Satz 2 gegen g_k häufen und die Extremalstützebenen von $P_1, P_2, \ldots$ würden zu Häufungselementen solche Ebenen durch g_k besitzen, die innere Punkte von $\mathfrak{K}$ enthalten. Analog bestimme ich zu jedem π_e ein ϱ_e. An Stelle des einen Winkelraumes (1) treten für π_e endlich viele Winkelräume. Nun sei zu einem festen ε für jeden Punkt von $\mathfrak{f}_1$ ein solches ϱ_k bzw. ϱ_e bestimmt; da die Menge $\mathfrak{f}_1$ abgeschlossen und die ϱ_k bzw. ϱ_e stetige Funktionen der π_k bzw. π_e sind, gibt es einen kleinsten Radius δ unter ihnen. Jedem Punkt π_k und π_e werde als Umgebung das innerhalb der Kugel mit dem Radius δ um $\pi_k(\pi_e)$ liegende Gebiet von $\mathfrak{O}$ zugeordnet. Dann reichen endlich viele dieser Gebiete aus, um $\mathfrak{f}_1$ zu überdecken. Ist π_1 und π_2 Mittelpunkt eines solchen Gebietes, so können wir die endlich vielen Umgebungen stets so ausgewählt denken, daß die Entfernung $\overline{\pi_1\pi_2} \geqq \delta$ ist. Mithin haben die um dieselben endlich vielen Mittelpunkte der zur Überdeckung von $\mathfrak{f}_1$ bebenutzten Gebiete mit dem Radius $\frac{\delta}{2}$ geschlagenen Kugeln keine inneren Punkte gemeinsam, so daß sich die Ungleichung

$$\vartheta(\delta)n \cdot \pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 < 4\pi R^2, \quad n \cdot \delta^2 < 4\frac{R}{\vartheta(\delta)}$$

ergibt, wo R der Radius der Kugel $\mathfrak{B}$, n die Anzahl der zur Überdeckung von $\mathfrak{f}_1$ benutzten Gebiete und $\vartheta(\delta)$ eine Funktion von δ ist, für die $\lim\limits_{\delta=0} \vartheta(\delta) = 1$ und $\vartheta(\delta) > 0$, wenn $\delta < 2R$, gilt.

Nun schneiden wir aus jeder Umgebung diejenigen Winkelräume heraus, welche sicher keine Punkte von $\mathfrak{f}_1$ erhalten. Dadurch erhalten

wir ein $\mathfrak{f}_1$ überdeckendes Gebiet von dem Inhalte $n \cdot \eta \cdot \delta^2 < 4\eta \cdot \frac{R}{\vartheta(\delta)}$, wo η nur von ε abhängt und mit ε unendlich klein wird. Mithin ist das Inhaltsmaß von $\mathfrak{f}_1$ gleich null.

Folglich ist das Lebesguesche Maß von $\mathfrak{f}$ gleich null. Denn ist $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ eine Folge von Zahlen, welche gegen 180 konvergiert, und $\alpha_n < 180$, so kann ich jedem α_n ein $\mathfrak{f}_n$ zuordnen, dessen Inhaltsmaß gleich null ist.

Verstehe ich unter $\mathfrak{f}_0$ die abzählbar vielen π_ε, für die der Projektionsraum von P_ε keine Kantenpunkte als Randpunkte enthält, und unter $(\mathfrak{f}_n - \mathfrak{f}_{n-1})$ die Punkte, welche in $\mathfrak{f}_n$, aber nicht in $\mathfrak{f}_{n-1}$ enthalten sind, so ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 + (\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1) + \ldots$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Der in „*Kreis und Kugel*"[2]) angedeutete Beweis beruht auf der Tatsache, daß die partielle Abteilung $\frac{\partial f}{\partial x}$ einer konvexen Funktion $f(x, y)$ stetig als Funktion von x und y ist, sobald sie es als Funktion von x allein ist — was sich aus denselben Überlegungen, die zu Satz 2 dieser Note führten, ergibt — und erfolgt dann sehr kurz unter Benutzung eines Satzes von *Fubini*.

Daneben verdient der hier gegebene Beweis Beachtung nicht nur, weil er mit elementaren Hilfsmitteln auskommt, sondern weil sich aus ihm auch sofort noch folgendes ergibt:

Ist $\mathfrak{c}$ *eine stetige Folge von Kantenpunkten, so besitzt* $\mathfrak{c}$ *stetige Tangenten; die* g_k *eines* P_k *ist Tangente an die höchstens abzählbar vielen Kurven* $\mathfrak{c}$, *welche durch* P_k *hindurchgehen.*

---

[2]) Siehe Anm. [1]).

(Eingegangen am 9. 11. 1920.)

Über de la Vallée Poussins Ober- und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinition von Perron[1]).

Von

Heinrich Hake in Düsseldorf.

Bei einer im Intervall $\langle a, b \rangle$ *stetigen* Funktion $f(x)$ ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ Stammfunktion von $f(x)$ insofern, als $F'(x) = f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ ausnahmslos gilt. Doch *nicht bei jeder* nach Riemann integrablen Funktion, geschweige denn bei jeder (nach Lebesgue) summierbaren, ist $F(x)$ auch nur in dem Sinne Stammfunktion von $f(x)$, daß $f(x) = DF(x)$[2]) für das Definitionsintervall *durchweg* zu erreichen wäre mit einem speziellen unter den Werten, welche der betreffenden Stelle durch Derivation des $F(x)$ zugeordnet werden können. Wohl aber hat C. de la Vallée Poussin gezeigt[3]): Ist $f(x)$ summierbar über das Intervall $\langle a, b \rangle$, so gibt es *totalstetige*[3a]) Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$, die $F(x)$ mit vorgeschriebener Genauigkeit gleichmäßig approximieren; dabei sind alle Derivierten von $F_1(x)$ *größer* als $f(x)$ an denjenigen Stellen, an welchen $f(x)$ nicht positiv unendlich ist; die Derivierten von $F_2(x)$ sind *kleiner* als $f(x)$, wo $f(x)$ nicht negativ unendlich ist.

In Analogie zu diesem Ergebnis, aber unabhängig von einem vorher festgelegten Integralbegriff führe ich in § 1 „Ober- und Unterfunktionen

---

[1]) Die vorliegende Darstellung ist ein Auszug aus einer Arbeit, zu der ich von Herrn Prof. H. Hahn veranlaßt wurde, und die von der Philosophischen Fakultät der Universität Bonn als Dissertation angenommen ist.

[2]) Zur Bezeichnung der Derivierten einer Funktion setzen wir vor das Funktionszeichen als Operatoren D, $D+$, D_+ oder D^+, je nachdem von den Derivierten an der betrachteten Stelle eine völlig willkürliche, eine beliebige rechtsseitige, die rechtsseitige untere oder die rechtsseitige obere gemeint ist.

[3]) C. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire (Paris 1916), S. 74.

[3a]) Über diesen Begriff vgl. etwa H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen 1, S. 523.

zu einer Funktion $f(x)$" ein und benutze umgekehrt — in Verallgemeinerung einer Definition von O. Perron[4]) — diese „adjungierten Funktionen" zu einer *Integraldefinition* S. Ein *Spezialfall* S^* der Definition S erweist sich als äquivalent mit dem Begriff der *Summierbarkeit*. Die allgemeine Definition S dagegen beherrscht unmittelbar auch Funktionen, die nicht summierbar sind, bei denen vielmehr erst „*uneigentliche Integrale*" definiert werden durch Verbindung besonderer konvergenter Prozesse mit denen der Lebesgueschen Integration. Nach Dini[5]), Harnack[6]), Denjoy[7]) sind die Methoden benannt, durch die uneigentliche Integrale der Typen DiL, HaL, DeL definiert werden. Daß jede Funktion, der im Sinne einer dieser drei Integraldefinitionen ein Integralwert zukommt, auch integrabel ist im Sinne der Definition S, wird in den §§ 2, 3, 4 bewiesen. Dies Ergebnis kann, weil Integrale DiL und HaL spezielle Integrale DeL sind, zusammenfassend als *Unterordnung der Integrale DeL unter die Definition S* bezeichnet werden. Offen bleibt die Frage, ob vielleicht auch umgehrt jede S-integrable Funktion integrabel ist im Sinne der Definition DeL.

§ 1.

Eine *Oberfunktion* $O(x)$ einer im Intervall $\langle a, b\rangle$ definierten Funktion $f(x)$ wird charakterisiert durch die folgenden Bedingungen:

(Ia) $O(x)$ ist stetig in $\langle a, b\rangle$.

(IIa) $D_+O(x) \neq -\infty$ gilt in $\langle a, b\rangle$ ausnahmslos.

(IIIa) $D_+O(x) \geqq f(x)$ gilt in $\langle a, b\rangle$ bis auf eine (von $O(x)$ abhängige) Menge vom Maße Null.

(IVa) $O(a) = 0$ ist der Anfangswert der Funktion $O(x)$.

Bei den Forderungen, die eine *Unterfunktion* $U(x)$ zu $f(x)$ charakterisieren, heißt es unter (IIb) $D^+U(x) \neq +\infty$ und unter (IIIb) $D^+U(x) \leqq f(x)$.

---

[4]) O. Perron, Heidelberger Ber., Math.-nat. Kl. Abt. A (1914), 14. Abh. — Auf H. Bauer, Monatsh. f. Math. u. Phys. **26** (1915), S. 153, wurde ich erst während des Druckes aufmerksam.

[5]) U. Dini, Grundlagen für eine Theorie einer veränderlichen reellen Größe (deutsch von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig 1892), S. 404. — A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 1. T. (Leipzig 1900), S. 184.

[6]) A. Harnack, Math. Ann. **24** (1880), S. 220. — C. Jordan, Cours d'analyse (2. Aufl.) **2** (Paris 1894), S. 50. — E. H. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. **2** (1901), S. 296.

[7]) A. Denjoy, C. R. **154** (1912), S. 859. — Neuerdings hat Denjoy sich sehr eingehend mit diesem Gegenstande befaßt (Journ. de math. (7) **1** (1915), S. 105; Bull. soc. math. **43** (1915), S. 161; Ann. Éc. Norm. (3) **33** (1916), S. 127. Doch waren mir die Arbeiten zur Zeit der Fertigstellung dieser Abhandlung unzugänglich.

Ober- und Unterfunktionen werden mit gemeinsamem Namen als *adjungierte Funktionen* (zu $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$) bezeichnet.

$f(x)$ heißt *integrabel* (*im Sinne der Definition*) S im Intervall $\langle a, b\rangle$, wenn zu beliebig vorgegebenem ε (>0) eine Oberfunktion $O(x)$ und eine Unterfunktion $U(x)$ der Art existieren, daß ihre *Endwerte* der Einschließung

(V) $$0 \leqq O(b) - U(b) < \varepsilon$$

genügen. — Wir werden sehen, daß aus dieser Bedingung der Endwerte für das *ganze Intervall* $\langle a, b\rangle$ folgt:

$$0 \leqq O(x) - U(x) < \varepsilon.$$

Diese Integraldefinition rechtfertigen wir durch den Nachweis, daß ihre Bedingungen im Intervall $\langle a, b\rangle$ eindeutig eine Funktion $S(x)$, die *Integralfunktion*, bestimmen, die wir auch mit $S_a^x(f)$ bezeichnen.

Nach (II) gilt in $\langle a, b\rangle$ für irgendwelche rechtsseitigen Derivierten adjungierter Funktionen $D_+ O(x) \neq -\infty$ und $D_+ U(x) \neq +\infty$ ausnahmslos. Gleichzeitige Derivierte zweier Funktionen $O(x)$, $U(x)$ sind also nie von gleichem Vorzeichen unendlich; über geeignet gewählte solcher Derivierten $D_+ O(x)$, $D_+ U(x)$ aber kann man schließen:

(1) $$\begin{cases} D_+\{O(x) - U(x)\} = D_+ O(x) - D_+ U(x) \\ \qquad\qquad \geqq D_+ O(x) - D^+ U(x). \end{cases}$$

Aus der mit (III) gegebenen Einschließung

$$D_+ O(x) \geqq f(x) \geqq D^+ U(x),$$

in $\langle a, b\rangle$ gültig bis auf eine Menge $\mathfrak{N}$ vom Maße Null, ergibt sich

(2) $$D_+ O(x) - D^+ U(x) \geqq 0$$

in demselben Umfange; wegen (II) gilt $D_+ O(x) - D^+ U(x) > -\infty$ ausnahmslos. Aus (1) und (2) ist

(3) $$D_+\{O(x) - U(x)\} \geqq 0$$

für das Intervall $\langle a, b\rangle$ unmittelbar bis auf die Menge $\mathfrak{N}$ zu folgern. Damit[8]) aber ist, weil $\mathfrak{N}$ das Maß Null hat, die ausnahmslose Gültigkeit von (3) gegeben. *Die Differenz zwischen einer beliebigen Oberfunktion und einer beliebigen Unterfunktion wächst* also *monoton im Definitionsintervall.* Diese Bemerkung zusammen mit der Bedingung (IV) der Anfangswerte ergibt für ganz $\langle a, b\rangle$ die Einschließung

(4) $$0 \leqq O(x) - U(x) \leqq O(b) - U(b);$$

[8]) Vgl. C. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale 1^2 (Louvain 1909), S. 80.

die untere Abschätzung für sich besagt, daß *eine Oberfunktion nie eine Unterfunktion untertrifft*: $O(x) \geqq U(x)$.

Nach (4) besagt die Integrabilitätsbedingung (V): Zu beliebigem positiven ε existiert ein Paar adjungierter Funktionen, das der Einschließung

$$0 \leqq O(x) - U(x) < \varepsilon \tag{5}$$

gleichmäßig in ganz $\langle a, b \rangle$ genügt. Damit ist die *Existenz einer und nur einer „Schnittfunktion"* $S(x)$ gegeben, die mit jeder Ober- und jeder Unterfunktion der Einschließung

$$O(x) \geqq S(x) \geqq U(x) \tag{6}$$

genügt.

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ sei eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen. Ist $f(x)$ integrabel S, so kann man dieser Zahlenfolge je eine Folge von Ober- und Unterfunktionen

$$O_k(x), \quad U_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

so zugeordnet denken, daß

$$O_k(b) - U_k(b) < \varepsilon_k \tag{8}$$

und damit nach (5) und (6) auch

$$\begin{cases} 0 \leqq O_k(x) - S(x) < \varepsilon_k \\ 0 \leqq S(x) - U_k(x) < \varepsilon_k \end{cases} \tag{9}$$

in ganz $\langle a, b \rangle$ gilt. Die Folge der $O_k(x)$ konvergiert also in $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig gegen $S(x)$ von oben, die der $U_k(x)$ ebenso von unten. Vermöge der gleichmäßigen Konvergenz überträgt sich die Stetigkeit der adjungierten Funktionen unmittelbar auf die Grenzfunktion: *Die Integralfunktion einer S-integrablen Funktion ist stetig im Definitionsintervall.*

Da jede Differenz $O(x) - U_k(x)$ (in dieser bedeutet $O(x)$ eine beliebig fixierte Oberfunktion und $U_k(x)$ eine in der Folge der Unterfunktionen aus (7) variable Unterfunktion) monoton wächst im Intervall $\langle a, b \rangle$, so *wächst* ebenfalls *monoton* die Differenz $O(x) - S(x) = O(x) - \lim\limits_{k \to \infty} U_k(x)$. Das gleiche gilt von der Differenz zwischen der Integralfunktion und einer beliebigen Unterfunktion.

Wir spezialisieren die Integraldefinition S dadurch zur *Definition S^**, daß wir die oben aufgeführten charakteristischen Bedingungen der Funktionen $O(x)$ und $U(x)$ durch engere ersetzen.

Oberfunktion im engeren Sinne soll eine Funktion $O^*(x)$ heißen, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

(I*a) $O^*(x)$ ist totalstetig in $\langle a, b\rangle$.

$$\left.\begin{array}{ll}(\text{II}^*\text{a}) & D_+ O^*(x) \neq -\infty \\ (\text{III}^*\text{a}) & D_+ O^*(x) \geqq f(x)\end{array}\right\} \text{ gelten in } \langle a, b\rangle \text{ ausnahmslos.}$$

(IV*a) $O^*(a) = 0$ ist der Anfangswert der Funktion $O^*(x)$.

In den für eine *Unterfunktion* $U^*(x)$ (zu $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$) charakteristischen Bedingungen heißt es dagegen unter (II*b) $D^+ U^*(x) \neq +\infty$ und unter (III*b) $D^+ U^*(x) \leqq f(x)$.

Ist $f(x)$ *integrabel im Sinne der Definition* S^* — die Bedingung (V) bleibt ungeändert —, so ist die *Integralfunktion* $S^*(x)$ nicht nur stetig wie die Funktion $S(x)$ im allgemeinen Falle, sondern *totalstetig* wie die speziellen adjungierten Funktionen der Definition S^*.

Für den Beweis denke man sich in $\langle a, b\rangle$ eine endliche Menge von paarweis fremden Teilintervallen $\langle c_m, d_m\rangle$. $(m = 1, \ldots, M)$ in solcher Bezeichnung, daß $c_m < d_m$ gilt bei jedem einzelnen m und $c_{m'} < c_{m''}$, wenn $m' < m''$ ist. Für ein beliebiges Paar adjungierter Funktionen schließt man (ohne zunächst die Teilintervalle einer weiteren Beschränkung zu unterwerfen)

$$(10)\quad \begin{cases} 0 \leqq \sum\limits_{m=1}^{M}\{(O^*(d_m) - S^*(d_m)) - (O^*(c_m) - S^*(c_m))\} \\ \leqq \sum\limits_{m=1}^{M}\{(O^*(d_m) - U^*(d_m)) - (O^*(c_m) - U^*(c_m))\}. \end{cases}$$

Weil nun aber $O^*(x) - U^*(x)$ als Differenz totalstetiger Funktionen totalstetig ist, kann man bei beliebig vorgegebenem $\eta\ (>0)$

$$(11)\quad 0 \leqq \sum_{m=1}^{M}\{(O^*(d_m) - U^*(d_m)) - (O^*(c_m) - U^*(c_m))\} < \eta$$

immer dadurch erreichen, daß man die Gesamtlänge der Teilintervalle passend beschränkt: $\sum\limits_{m=1}^{M}(d_m - c_m) < \delta(\eta)$. Durch diese Beschränkung ist dann nach (10) gleichzeitig

$$(12)\quad 0 \leqq \sum_{m=1}^{M}\{(O^*(d_m) - S^*(d_m)) - (O^*(c_m) - S^*(c_m))\} < \eta$$

gesichert. Es ist also $O^*(x) - S^*(x)$ totalstetig, und somit auch

$$S^*(x) = O^*(x) - \{O^*(x) - S^*(x)\}.$$

Daraus, daß die Integralfunktion einer S^*-integrablen Funktion totalstetig ist, werden wir schließen: *Eine Funktion* $f(x)$, *die in* $\langle a, b\rangle$

integrabel ist im Sinne der Definition S^*, ist auch summierbar über $\langle a, b\rangle$, und zwar bestimmt die Definition S^* dieselbe Integralfunktion wie die Lebesguesche Definition.

Es seien nämlich $O_n^*(x)$ und $U_n^*(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zwei Folgen spezieller Ober- bzw. Unterfunktionen der Art, daß sowohl die $O_n^*(b)$ wie die $U_n^*(b)$ gegen $S^*(b)$ konvergieren. Da nicht nur jedes $O_n^*(x)$ und jedes $U_n^*(x)$, sondern auch $S^*(x)$ in $\langle a, b\rangle$ totalstetig ist und mithin, nach einem bekannten Satze von Lebesgue, überall in $\langle a, b\rangle$, abgesehen von einer Menge des Maßes Null, eine eindeutige, endliche Derivierte besitzt, so gibt es in diesem Intervall eine Teilmenge $\mathfrak{P}$, auf der alle genannten Funktionen eine eindeutige, endliche Derivierte besitzen, und deren Komplement $\mathfrak{Q}$ (in bezug auf $\langle a, b\rangle$) das Maß Null hat. Auf $\mathfrak{P}$ ist (III*) in der Form

$$O_n^{*\prime}(x) \geqq f(x) \geqq U_n^{*\prime}(x) \tag{13}$$

zu schreiben; aus

$$O_n^*(x'') - O_n^*(x') \geqq S^*(x'') - S^*(x') \geqq U_n^*(x'') - U_n^*(x') \qquad (a \leqq x' \leqq x'' \leqq b)$$

folgt ebendort

$$O_n^{*\prime}(x) \geqq S^{*\prime}(x) \geqq U_n^{*\prime}(x). \tag{14}$$

Definiert man ferner auf der Menge $\mathfrak{P}$ eine Funktion $\varphi(x)$ als untere Schranke der $O_n^{*\prime}(x)$ und ein $\psi(x)$ als obere Schranke der $U_n^{*\prime}(x)$, so gelten auch für diese auf $\mathfrak{P}$ meßbaren Funktionen die Einschließungen

$$\begin{cases} \varphi(x) \geqq f(x) \geqq \psi(x) \\ \varphi(x) \geqq S_n^{*\prime}(x) \geqq \psi(x). \end{cases} \tag{15}$$

In der Menge $\mathfrak{P}$ charakterisieren wir eine Teilmenge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\varrho)$ durch die Bedingung

$$\varphi(x) - \psi(x) \geqq \varrho, \tag{16}$$

in der ϱ eine beliebige positive Zahl bedeutet. Dieses $\mathfrak{R}$ ist enthalten in jeder Teilmenge $\mathfrak{R}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von $\mathfrak{P}$, die durch

$$O_n^{*\prime}(x) - U_n^{*\prime}(x) \geqq \varrho \tag{17}$$

charakterisiert ist. Für die Folge der $\mathfrak{R}_n$ gilt nun $\lim\limits_{n\to\infty} m(\mathfrak{R}_n) = 0$. (Wäre nämlich, bei irgend einem positiven σ, $m(\mathfrak{R}_\nu) \geqq \sigma$ für unendlich viele ν, so wäre für diese auch $O_\nu^*(b) - U_\nu^*(b) \geqq \varrho \cdot \sigma$, entgegen der vorausgesetzten Konvergenz der $O_n^*(b)$ und $U_n^*(b)$ gegen $S^*(b)$.) Wenn aber

$\lim\limits_{n\to\infty} m(\mathfrak{R}_n) = 0$ ist, hat $\mathfrak{R}(\varrho)$ das Maß Null. Weil das positive ϱ beliebig klein gewählt werden kann, gilt auch

$$(18)\qquad \varphi(x) = \psi(x)$$

bis auf eine Teilmenge $\overline{\mathfrak{Q}}$ von $\mathfrak{P}$, die das Maß Null hat. Damit ist

$$(19)\qquad f(x) = S^{*\prime}(x)$$

in $\langle a, b\rangle$ bis auf $\mathfrak{Q} + \overline{\mathfrak{Q}}$, eine Menge vom Maße Null, bewiesen; es gilt daher

$$(20)\qquad S^*(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

im Sinne einer Integration nach Lebesgue.

In dem Nachweis, daß *die Integraldefinition S^* und der Begriff der Summierbarkeit äquivalent* sind, bleibt noch zu zeigen: *Ist $f(x)$ summierbar über das Intervall $\langle a, b\rangle$, so ist $f(x)$ dort auch integrabel im Sinne der Definition S^*, und es ist wieder $\int_a^x f(t)\,dt = S^*(x)$.*

Diese Behauptung ist bewiesen, wenn wir zwei Folgen von Funktionen $O_n^*(x)$, $U_n^*(x)$ angeben können, deren Elemente einzeln zu $f(x)$ (im engeren Sinne) adjungiert sind, und die als Folgen gegen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ konvergieren. Das Gewünschte leisten nun gerade die Funktionen, welche C. de la Vallée Poussin als *„Majoranten und Minoranten zu unbestimmten Integralen"* eingeführt hat; wir haben nur die allgemeine Konstruktion von de la Vallée Poussin*) für den eindimensionalen Fall zu spezialisieren:

$F(x)$ hat in $\langle a, b\rangle$ eine eindeutige, endliche und mit $f(x)$ übereinstimmende Derivierte bis auf eine Menge vom Maße Null; die (in diesem Sinne) singuläre Teilmenge des Intervalls werde mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet. $\{\sigma_\nu\}$ sei eine absteigend gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen; ihre Reihe sei konvergent, σ der Summenwert. Der Folge der σ_ν wird zugeordnet gedacht eine ineinandergeschachtelte Folge offener, $\mathfrak{S}$ einschließender Mengen $\mathfrak{C}_\nu$ von der Beschaffenheit, daß

$$(21)\qquad m(\mathfrak{C}_\nu) < \tfrac{1}{2}\sigma_\nu, \quad \int_{\mathfrak{C}_\nu} |f(t)|\,dt < \tfrac{1}{2}\sigma_\nu$$

ist. Mit diesen Mengen $\mathfrak{C}_\nu$ definieren wir die Funktionen

*) Vgl. C. de la Vallée Poussin, Intégrales etc., S. 75, wo die folgenden Angaben ausgeführt und begründet sind.

$$(22)\quad \begin{cases} G_\nu(x) = m(\langle a, x\rangle \cdot \mathfrak{E}_\nu)\ ^{10)} & \\ H_\nu(x) = \int\limits_{\langle a, x\rangle \cdot \mathfrak{E}_\nu} |f(t)|\,dt & \\ G(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x) & (0 \leqq G(x) < \tfrac{1}{2}\sigma) \\ H(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} H_\nu(x) & (0 \leqq H(x) < \tfrac{1}{2}\sigma). \end{cases}$$

Die zwei Funktionenfolgen

$$(23)\quad \left.\begin{cases} O_n^*(x) = F(x) + \frac{1}{n}\{(x-a) + G(x) + H(x)\} \\ U_n^*(x) = F(x) - \frac{1}{n}\{(x-a) + G(x) + H(x)\} \end{cases}\right\} \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

sind dann von der verlangten Art. Insbesondere ist jedes $O_n^*(x)$ wie jedes $U_n^*(x)$ totalstetig. Ferner gilt für beliebige Derivierte auf $\mathfrak{S}$

$$(24)\qquad DO_n^*(x) = +\infty, \quad DU_n^*(x) = -\infty,$$

auf der Komplementärmenge von $\mathfrak{S}$ aber

$$(25)\qquad DO_n^*(x) > f(x), \quad DU_n^*(x) < f(x).$$

§ 2.

Eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ definierte Funktion $f(x)$ heißt ***summierbar an der Stelle*** r, wenn ein Teilintervall $\langle r', r''\rangle$ existiert, zu dessen inneren Punkten r gehört, und über das $f(x)$ summierbar ist. Eine Stelle, an der $f(x)$ nicht summierbar ist, heißt ***singulär***. Die Menge der singulären Stellen wird mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet, ihre Komplementärmenge in bezug auf $\langle a, b\rangle$ mit $\mathfrak{R}$. Die Menge $\mathfrak{S}$ ist ihrem Begriffe nach abgeschlossen. $\mathfrak{R}$ besteht daher aus einer abzählbaren Menge von offenen „komplementären" Intervallen; über jedes Intervall, das ganz im Innern eines komplementären liegt, ist $f(x)$ summierbar.

Bei dem ***DiL-Prozeß***[11]) wird die singuläre Menge $\mathfrak{S}$ als ***abzählbar*** vorausgesetzt. Damit existiert eine Ordinalzahl ν der Art, daß die Ab-

---

[10]) $m(\langle a, x\rangle \cdot \mathfrak{E}_\nu)$ bezeichnet das Maß des Durchschnitts vom Intervall $\langle a, x\rangle$ mit der Menge $\mathfrak{E}_\nu$.

[11]) In § 4 wird derselbe Prozeß unter allgemeineren Voraussetzungen angewandt. Wir können uns dort kurz fassen, wenn wir schon hier beachten, wie in die Bedingungen des Integralbegriffs DiL von der Summierbarkeit nicht mehr eingeht als die Tatsache, daß eine über $\langle a, b\rangle$ summierbare Funktion $f(x)$ eine stetige Integralfunktion $\int_a^x f(t)\,dt$ bestimmt. — Die gleiche Bemerkung gilt für den Harnackschen Prozeß, der in § 3 zu einer unmittelbaren Erweiterung des Begriffs der Summierbarkeit dient und in § 4 wieder unter allgemeineren Voraussetzungen angewandt wird.

leitung $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ leer ist. Bedeutet $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ die *erste* verschwindende Ableitung, so ist ν nicht Limeszahl; es gibt eine Ableitung $\mathfrak{S}^{(\nu-1)}$, und diese besteht aus *endlich* vielen Punkten.

Hierauf beruht *die Definition der Integrale DiL durch transfinite Induktion.* Ein DiL-Integral über ein Intervall $\langle a_0, b_0\rangle$, das frei ist von Punkten aus $\mathfrak{S}^{(0)}$, ist nichts anderes als ein Lebesguesches. Für ein Intervall $\langle a_\sigma, b_\sigma\rangle$, in dem $\mathfrak{S}^{(\sigma)}$ mit einem $\sigma < \tau \leqq \nu$ verschwindet, wird die Definition des Integrals als gegeben angenommen (Voraussetzung des Induktionsschlusses). Für den Schluß auf τ denke man sich ein Intervall $\langle a_\tau, b_\tau\rangle$, in dem $\mathfrak{S}^{(\tau)}$, aber kein $\mathfrak{S}^{(\sigma)}$ $(\sigma < \tau)$ leer ist. Von $\mathfrak{S}^{(\tau-1)}$ enthalte das Intervall die Punkte s_i $(i = 1, \ldots, J)$ im Innern; die Intervallendpunkte gehören möglicherweise auch zu $\mathfrak{S}^{(\tau-1)}$

(1) $$a_\tau = s_0 < s_1 < \ldots < s_J < s_{J+1} = b_\tau.$$

Bedingung für die Existenz von $DiL_{a_\tau}^{b_\tau}(f)$ ist dann dies:

1. In jedem Intervall $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, das ganz im Innern von $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ liegt, existiert $DiL_{x_i}^{x_{i+1}}(f)$ als endlicher Wert.

2. Zu jedem Intervall $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ gehört ein eindeutig bestimmter endlicher Grenzwert

$$DiL_{s_i}^{s_{i+1}}(f) = \lim_{\substack{x_i \to s_i+0 \\ x_{i+1} \to s_{i+1}-0}} DiL_{x_i}^{x_{i+1}}(f).$$

Der Wert des Integrals über $\langle a_\tau, b_\tau\rangle$ wird definiert durch

(2) $$DiL_{a_\tau}^{b_\tau}(f) = \sum_{i=0}^{J} DiL_{s_i}^{s_{i+1}}(f).$$

Mit $DiL_a^b(f)$ existiert auch $DiL_a^x(f)$ für jedes x in $\langle a, b\rangle$, und zwar ist die *Integralfunktion*

(3) $$F(x) = DiL_a^x(f)$$

stetig in ihrem Definitionsintervall.

Gegenstand dieses Paragraphen ist nun der Beweis des Satzes:

Eine Funktion $f(x)$, für die $DiL_a^b(f)$ existiert, ist auch integrabel im Sinne der Definition S, und beide Definitionen bestimmen dieselbe Integralfunktion.

Der Beweis ist erbracht, wenn man einer Funktion $f(x)$, für die $DiL_a^b(f)$ existiert, bei beliebig vorgegebenem ε (> 0) ein Paar von Funktionen $O(x)$, $U(x)$ so zuordnen kann, daß diese alle Eigenschaften einer *Ober-* bzw. *Unterfunktion* besitzen, und daß sie *die Integralfunktion $F(x)$ in $\langle a, b\rangle$ approximieren*, wie es durch die Einschließungen

$$(4)\qquad \begin{cases} 0 \leqq O(x) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \leqq F(x) - U(x) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

beschrieben wird. Ein $O(x)$ der verlangten Art ist mit $F(x) + Z(x)$ gefunden, wenn die *Zusatzfunktion* $Z(x)$ den folgenden Forderungen genügt: $Z(x)$ ist stetig in $\langle a, b\rangle$, hat den Anfangswert Null: $Z(a) = 0$, wächst monoton: $D_+ Z(x) \geqq 0$, bleibt mit seinem Endwert unter der Schranke $\frac{\varepsilon}{2}$: $Z(b) < \frac{\varepsilon}{2}$ und bewirkt in der Summe $O(x) = F(x) + Z(x)$ ausnahmslose Gültigkeit von $D_+ O(x) \neq -\infty$ und Gültigkeit von $D_+ O(x) \geqq f(x)$ bis auf die Menge $\mathfrak{S}$. Der *Existenzbeweis für ein* $Z(x)$ mit diesen Eigenschaften aber verläuft — der Integraldefinition entsprechend — *in transfiniter Induktion.*

Wie für ein *singularitätenfreies Intervall* $\langle a_0, b_0\rangle$ eine geeignete Zusatzfunktion zu gewinnen ist, wurde in § 1 angegeben[12]). *Für ein Intervall* $\langle a_\sigma, b_\sigma\rangle$ *wird vorausgesetzt*: Ist $F_\sigma(x) = DiL^x_{a_\sigma}(f)$ und $\varepsilon_\sigma (> 0)$ eine im übrigen beliebig vorgegebene Zahl, so existiert eine stetige Zusatzfunktion $Z_\sigma(x)$, die selbst die folgenden Eigenschaften hat

$$(5)\qquad Z_\sigma(a_\sigma) = 0, \quad D_+ Z_\sigma(x) \geqq 0, \quad Z_\sigma(b_\sigma) < \frac{\varepsilon_\sigma}{2}$$

und in der Summe $O_\sigma(x) = F_\sigma(x) + Z_\sigma(x)$ ausnahmslose Gültigkeit von

$$(6)\qquad D_+ O_\sigma(x) \neq -\infty$$

sichert, während

$$(7)\qquad D_+ O_\sigma(x) \geqq f(x)$$

bis auf diejenigen Stellen aus $\langle a, b\rangle$ gilt, die zu $\mathfrak{S}$ gehören. *Der Schluß auf* τ besteht in der *Konstruktion einer Funktion* $Z_\tau(x)$, die als Zusatzfunktion von $F_\tau(x) = DiL^x_{a_\tau}(f)$ im Intervall $\langle a_\tau, b_\tau\rangle$ leistet, was von $Z_\sigma(x)$ für $\langle a_\sigma, b_\sigma\rangle$ vorausgesetzt wird.

Um diese Voraussetzungen für die Konstruktion von $Z_\tau(x)$ in $\langle s_0, s_{\tau+1}\rangle = \langle a_\tau, b_\tau\rangle$ in durchsichtiger Darstellung ausnutzen zu können, legen wir *in jedes Intervall* $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ *zwei Folgen von Teilpunkten* $a_i^{(n)}, b_i^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, deren Elemente folgendermaßen definiert sind:

[12]) Was hier durch die Beziehung auf § 1 gewonnen wird, das ist für die entsprechenden Überlegungen des § 4, mit denen im Existenzbeweise für adjungierte Funktionen der Schluß auf γ vollzogen wird, durch die Voraussetzungen dieses Schlusses gegeben; mit dem Unterschiede freilich, daß an die Stelle der hier noch ausnahmslos gültigen Abschätzung $D_+ O_0(x) \geqq f(x)$ dort eine solche tritt, die von vornherein nur bis auf eine Menge vom Maße Null gesichert ist.

$$(8)\qquad \begin{cases} a_i^{(0)} = b_i^{(0)} = m_i = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1}) \\ \left.\begin{aligned} a_i^{(m)} &= \tfrac{1}{2}(s_i + a_i^{(m-1)}) \\ b_i^{(m)} &= \tfrac{1}{2}(s_{i+1} + b_i^{(m-1)}) \end{aligned}\right\} \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ausgehend von den Intervallen dieser Teilung brauchen wir weiterhin Integrale DiL (mit variabler oberer Grenze) in sukzessive ausgedehnten Intervallen; dementsprechend führen wir im voraus *für die zugehörigen Integralfunktionen Bezeichnungen* ein wie folgt:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{V}_i^{(n)}(x) = DiL^x_{a_i^{(n+1)}}(f) & \text{in } \langle a_i^{(n+1)}, a_i^{(n)}\rangle \\ V_i(x) = DiL^x_{s_i}(f) & \text{in } \langle s_i, m_i\rangle \\ \mathfrak{V}_i(x) = \begin{cases} V_i(x) \\ V_i(m_i) \end{cases} & \begin{array}{l} \text{in } \langle s_i, m_i\rangle \\ \text{in } \langle m_i, s_{i+1}\rangle. \end{array} \end{cases}$$

Haben die Funktionszeichen $\mathfrak{W}_i^{(n)}(x)$, $W_i(x)$, $\mathfrak{W}_i(x)$ entsprechende Bedeutung:

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{W}_i^{(n)}(x) = DiL^x_{b_i^{(n)}}(f) & \text{in } \langle b_i^{(n)}, b_i^{(n+1)}\rangle \\ W_i(x) = DiL^x_{m_i}(f) & \text{in } \langle m_i, s_{i+1}\rangle \\ \mathfrak{W}_i(x) = \begin{cases} W_i(m_i) = 0 \\ W_i(x) \end{cases} & \begin{array}{l} \text{in } \langle s_i, m_i\rangle \\ \text{in } \langle m_i, s_{i+1}\rangle, \end{array} \end{cases}$$

so gilt für

$$(11)\qquad \mathfrak{F}_i(x) = DiL^x_{s_i}(f)$$

in $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ die Darstellung

$$(12)\qquad \mathfrak{F}_i(x) = \mathfrak{V}_i(x) + \mathfrak{W}_i(x).$$

Die Funktion $Z_\tau(x)$, für welche eine *Schranke* $\frac{1}{2}\varepsilon_\tau\,(> 0)$ vorgegeben zu denken ist, gewinnen wir durch Superposition von Funktionenfolgen und Funktionen in endlicher Anzahl. Um diese bei ihrer Einführung passend zu beschränken, geben wir uns zwei Folgen positiver Zahlen $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ derart vor, daß jede eine konvergente Reihe bildet und

$$(13)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{(n)} < \frac{1}{2^3\cdot(J+1)}\cdot\varepsilon_\tau, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{(n)} < \frac{1}{2^3\cdot(J+1)}\cdot\varepsilon_\tau$$

gilt.

Mit einem Intervall $\langle a_i^{(n+1)}, a_i^{(n)}\rangle$ *sind wir im Falle der Voraussetzung* unseres Induktionsschlusses. Zu $\alpha^{(n)}$ existiert demnach eine stetige Zusatzfunktion $\mathfrak{A}_i^{(n)}(x)$ (zur Integralfunktion $\mathfrak{V}_i^{(n)}(x)$), die den folgenden Gleichungen und Ungleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_i^{(n)}(a_i^{(n+1)}) = 0, \quad D_+\mathfrak{A}_i^{(n)}(x) \geqq 0, \quad \mathfrak{A}_i^{(n)}(a_i^{(n)}) < \alpha^{(n)} \\ D_+\{\mathfrak{V}_i^{(n)}(x) + \mathfrak{A}_i^{(n)}(x)\} \neq -\infty \\ D_+\{\mathfrak{V}_i^{(n)}(x) + \mathfrak{A}_i^{(n)}(x)\} \geqq f(x) \end{cases}$$

genügt, von denen die letzte aber nur bis auf die in $\langle a_i^{(n+1)}, a_i^{(n)} \rangle$ gelegenen Stellen der Menge $\mathfrak{S}$ gesichert ist. Definiert man dann

$$
(15) \qquad \begin{cases} A_i^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathfrak{A}_i^{(n)}(a_i^{(n+1)}) = 0 & \text{in } \langle s_i, a_i^{(n+1)} \rangle \\ \mathfrak{A}_i^{(n)}(x) & \text{in } \langle a_i^{(n+1)}, a_i^{(n)} \rangle \\ \mathfrak{A}_i^{(n)}(a_i^{(n)}) & \text{in } \langle a_i^{(n)}, m_i \rangle \end{cases} \\ A_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_i^{(n)}(x), \end{cases}
$$

so überträgt sich auf $A_i(x)$ die Monotonie und Stetigkeit der Gliedfunktionen. Auch jede Funktion

$$
(16) \qquad \mathfrak{A}_i(x) = \begin{cases} A_i(x) & \text{in } \langle s_i, m_i \rangle \\ A_i(m_i) & \text{in } \langle m_i, s_{i+1} \rangle \end{cases}
$$

hat die gleichen Eigenschaften, und für Anfangs- und Endwert dieser Funktionen gilt

$$
(17) \qquad \mathfrak{A}_i(s_i) = 0, \quad \mathfrak{A}_i(s_{i+1}) < \frac{1}{2^s \cdot (J+1)} \cdot \varepsilon_r .
$$

Ausgehend von Funktionen $\mathfrak{B}_i^{(n)}(x)$, die jeweils in ihrem Intervall $\langle b_i^{(n)}, b_i^{(n+1)} \rangle$ dem vorgegebenen $\beta^{(n)}$ gemäß zu wählen sind, gelangen wir — entsprechend wie zu den $\mathfrak{A}_i(x)$ — zu $(J+1)$ Funktionen $\mathfrak{B}_i(x)$. Von jeder Summe

$$
(18) \qquad \mathfrak{M}_i(x) = \mathfrak{A}_i(x) + \mathfrak{B}_i(x)
$$

erkennt man außer der Stetigkeit sofort die folgenden Eigenschaften

$$
(19) \qquad \mathfrak{M}_i(s_i) = 0, \quad D_+\mathfrak{M}_i(x) \geqq 0, \quad \mathfrak{M}_i(s_{i+1}) < \frac{1}{2^s \cdot (J+1)} \cdot \varepsilon_r .
$$

Um von

$$
(20) \qquad \mathfrak{F}_i(x) + \mathfrak{M}_i(x)
$$

die Derivierte D_+ für eine innere Stelle ξ aus $\langle s_i, s_{i+1} \rangle$ zu untersuchen, gehen wir auf die Differenzenquotienten zurück und schreiben

$$
(21) \qquad \frac{\{\mathfrak{F}_i(\xi+h) + \mathfrak{M}_i(\xi+h)\} - \{\mathfrak{F}_i(\xi) + \mathfrak{M}_i(\xi)\}}{h}
$$

$$
= \frac{\mathfrak{F}_i(\xi+h) - \mathfrak{F}_i(\xi)}{h} + \frac{\mathfrak{A}_i(\xi+h) - \mathfrak{A}_i(\xi)}{h} + \frac{\mathfrak{B}_i(\xi+h) - \mathfrak{B}_i(\xi)}{h} + \frac{\mathfrak{B}_i(\xi+h) - \mathfrak{B}_i(\xi)}{h} .
$$

Setzen wir insbesondere voraus $s_i < \xi < \xi + h < m_i$, so reduziert sich die viergliedrige Summe rechts auf den Ausdruck

$$
\frac{\mathfrak{F}_i(\xi+h) - \mathfrak{F}_i(\xi)}{h} + \frac{\mathfrak{A}_i(\xi+h) - \mathfrak{A}_i(\xi)}{h}
$$

und dieser wieder (wenn wir in der Reihe 0, 1, 2, ... den durch die Forderung engster Einschließung $a_i^{(n_0+1)} \leqq \xi < \xi + h < a_i^{(n_0)}$ bestimmten Index n_0 auswählen) auf

$$\frac{\left\{\mathfrak{B}_i^{(n_0)}(\xi+h) + \mathfrak{A}_i^{(n_0)}(\xi+h)\right\} - \left\{\mathfrak{B}_i^{(n_0)}(\xi) + \mathfrak{A}_i^{(n_0)}(\xi)\right\}}{h}.$$

Aus dieser Darstellung aber folgt

$$(22)\qquad D_+\{\mathfrak{F}_i(\xi) + \mathfrak{M}_i(\xi)\} = D_+\{\mathfrak{B}_i^{(n_0)}(\xi) + \mathfrak{A}_i^{(n_0)}(\xi)\}.$$

Im Falle $m_i \leqq \xi < s_{i+1}$ ergibt sich entsprechend

$$(23)\qquad D_+\{\mathfrak{F}_i(\xi) + \mathfrak{M}_i(\xi)\} = D_+\{\mathfrak{W}_i^{(n_0)}(\xi) + \mathfrak{B}_i^{(n_0)}(\xi)\}.$$

Jedenfalls leistet die Addition von $\mathfrak{M}_i(x)$ zu $\mathfrak{F}_i(x)$ schon dieses:

Im Innern von $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ gilt ausnahmslos

$$(24)\qquad D_+\{\mathfrak{F}_i(x) + \mathfrak{M}_i(x)\} \neq -\infty,$$

$$(25)\qquad D_+\{\mathfrak{F}_i(x) + \mathfrak{M}_i(x)\} \geqq f(x)$$

aber bis auf diejenigen Stellen, welche zu $\mathfrak{S}$ gehören[13]).

Gehört insbesondere s_0 nicht zu $\mathfrak{S}$, dann kann die Zusatzfunktion $\mathfrak{M}_0(x)$ so gewählt werden, daß s_0 keine Ausnahmestelle für die Bedingung (25) bildet; derartige Ausnahmestellen sind also auf die Menge $\mathfrak{S}$ beschränkt. Da aber $\mathfrak{S}$ das Maß Null hat und auf einer solchen Menge die Bedingung $D_+ O_r(x) \geqq f(x)$ von der nachzuweisenden Oberfunktion durchbrochen sein darf, so übersieht man, daß es wegen dieser Bedingung weiterer Zusatzglieder schon nicht mehr bedarf. Wohl aber ist eine Funktion $\mathfrak{N}_i(x)$, wie wir sie nun noch in $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ aufzeigen, nötig, um ausnahmslose Gültigkeit von $D_+ O_r(x) \neq -\infty$ für $\langle a_r, b_r\rangle$ zu sichern.

Zur Funktion $\mathfrak{N}_i(x)$ gelangen wir über eine *Vergleichsfunktion* $\mathfrak{K}_i(x)$ (zu $\mathfrak{F}_i(x)$), die wir mit den Daten

$$(26)\qquad \begin{cases} k_i^{(0)} = \min(\mathfrak{F}_i(x);\ s_i \leqq x \leqq s_{i+1}) \\ k_i^{(n+1)} = \min(\mathfrak{F}_i(x);\ s_i \leqq x \leqq a_i^{(n)}) \end{cases}$$

[13]) Wenn insbesondere in einem Intervall $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$ keine andern Stellen als die Endpunkte für die Funktion $f(x)$ singulär sind, dann existiert bei beliebig vorgegebenem $\beta_\nu\,(>0)$ zu $\mathfrak{F}_\nu(x) = \int\limits_{a_\nu}^{x} f(t)\,dt$ $(a_\nu \leqq x \leqq b_\nu)$ ein stetiges $\mathfrak{M}_\nu(x)$ derart, daß $\mathfrak{M}_\nu(a_\nu) = 0$ und $\mathfrak{M}_\nu(b_\nu) < \frac{\beta_\nu}{2}$ ist, daß ferner $D_+\mathfrak{M}_\nu(x) \geqq 0$ in $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$ ausnahmslos, $D_+\{\mathfrak{F}_\nu(x) + \mathfrak{M}_\nu(x)\} \neq -\infty$ und $D_+\{\mathfrak{F}_\nu(x) + \mathfrak{M}_\nu(x)\} \geqq f(x)$ aber bis auf die Endpunkte des Intervalls gilt. Diese Bemerkung nehmen wir in § 3 zum Ausgangspunkt des Existenzbeweises für Oberfunktionen.

folgendermaßen definieren

$$(27)\begin{cases} \mathfrak{K}_i(x) = k_i^{(0)} \quad \text{in} \quad \langle m_i, s_{i+1}\rangle \\ \mathfrak{K}_i(a_i^{(n)}) = k_i^{(n)} \\ \mathfrak{K}_i(x) \quad = \mathfrak{K}_i(a_i^{(n)}) + (x - a_i^{(n)}) \dfrac{\mathfrak{K}_i(a_i^{(n+1)}) - \mathfrak{K}_i(a_i^{(n)})}{a_i^{(n+1)} - a_i^{(n)}} \quad \text{in} \quad (a_i^{(n+1)}, a_i^{(n)}). \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion $\mathfrak{K}_i(x)$ über einem Intervall $\langle \xi, s_{i+1}\rangle$, dessen linker Endpunkt im Innern von $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ liegt, ist ein Streckenzug, der monoton fällt; in $\langle \xi, s_{i+1}\rangle$ ist also $\mathfrak{K}_i(x)$ totalstetig. Indem man sich weiter überzeugt, daß $\mathfrak{K}_i(x)$ im ganzen Intervall $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ monoton und stetig ist, kann man auch die *Totalstetigkeit* für das ganze Intervall behaupten. Faßt man dann $\mathfrak{K}_i(x)$ auf als Integralfunktion von irgendeiner ihrer Derivierten: $\mathfrak{K}_i(x) = \int\limits_{s_i}^{x} D\mathfrak{K}_i(t)\,dt$, so ist nach § 1 auf die *Existenz einer* (total-) *stetigen Funktion* $\mathfrak{N}_i(x)$ zu schließen, für die

$$(28)\qquad \begin{cases} \mathfrak{N}_i(s_i) = 0, \quad D_+\mathfrak{N}_i(x) \geqq 0, \quad \mathfrak{N}_i(s_{i+1}) < \dfrac{1}{2^i\cdot(J+1)}\cdot\varepsilon, \\ D_+\{\mathfrak{K}_i(x) + \mathfrak{N}_i(x)\} \neq -\infty \end{cases}$$

ist und die letzte Ungleichung insbesondere auch für $x = s_i$ gilt. Für die Stelle s_i aber beweist man mit der in ganz $\langle s_i, s_{i+1}\rangle$ gültigen Ungleichung $\mathfrak{K}_i(x) \leqq \mathfrak{F}_i(x)$ die Abschätzung

$$(29)\qquad D_+\{\mathfrak{K}_i(s_i) + \mathfrak{N}_i(s_i)\} \leqq D_+\{\mathfrak{F}_i(s_i) + \mathfrak{N}_i(s_i)\}.$$

Was $\mathfrak{N}_i(x)$ für $\mathfrak{K}_i(x)$ leistet, überträgt sich somit auf $\mathfrak{F}_i(x)$ an der Stelle s_i in dem Sinne, daß dort ebenfalls gilt

$$(30)\qquad D_+\{\mathfrak{F}_i(s_i) + \mathfrak{N}_i(s_i)\} \neq -\infty.$$

Mit den Funktionen $\mathfrak{M}_i(x)$ und $\mathfrak{N}_i(x)$ gelangen wir schließlich zur endgültigen *Zusatzfunktion* $Z_r(x)$ für das Intervall $\langle a_r, b_r\rangle = \langle s_0, s_{J+1}\rangle$ wie folgt

$$(31)\qquad \begin{cases} M_i(x) = \begin{cases} \mathfrak{M}_i(s_i) = 0 & \text{in} \quad \langle s_0, s_i) \\ \mathfrak{M}_i(x) & \text{in} \quad \langle s_i, s_{i+1}\rangle \\ \mathfrak{M}_i(s_{i+1}) & \text{in} \quad (s_{i+1}, s_{J+1}\rangle \end{cases} \\ N_i(x) = \begin{cases} \mathfrak{N}_i(s_i) = 0 & \text{in} \quad \langle s_0, s_i) \\ \mathfrak{N}_i(x) & \text{in} \quad \langle s_i, s_{i+1}\rangle \\ \mathfrak{N}_i(s_{i+1}) & \text{in} \quad (s_{i+1}, s_{J+1}\rangle \end{cases} \\ Z_i(x) = \quad \mathfrak{M}_i(x) + \mathfrak{N}_i(x) \\ Z_r(x) = \sum\limits_{i=0}^{J} Z_i(x). \end{cases}$$

Für die stetige Funktion $Z_\tau(x)$ selbst gilt

$$(32)\qquad Z_\tau(a_\tau)=0,\qquad D_+Z_\tau(x)\geqq 0,\qquad Z_\tau(b)<\tfrac{1}{2}\varepsilon_\tau.$$

Die gleichfalls stetige *Oberfunktion*

$$(33)\qquad O_\tau(x)=F_\tau(x)+Z_\tau(x)$$

approximiert die Integralfunktion $F_\tau(x)$ in $\langle a_\tau, b_\tau\rangle$ gemäß der Einschließung

$$(34)\qquad 0\leqq O_\tau(x)-F_\tau(x)<\tfrac{1}{2}\varepsilon_\tau.$$

Auch die Deriviertenbedingungen werden von $O_\tau(x)$ in dem zu fordernden Umfange erfüllt. Denkt man sich nämlich zu einer fixierten Stelle x aus $\langle a_\tau, b_\tau\rangle$ den größtmöglichen Index i aus der Reihe $0, 1, \ldots, J$ bestimmt, der der Bedingung $s_i\leqq x$ genügt, und beschränkt man h auf solche positiven Werte, daß $x+h<s_{i+1}$ ist, so gilt die Darstellung

$$(35)\qquad \frac{\mathfrak{O}_\tau(x+h)-\mathfrak{O}_\tau(x)}{h}=\frac{\mathfrak{F}_i(x+h)-\mathfrak{F}_i(x)}{h}+\frac{\mathfrak{M}_i(x+h)-\mathfrak{M}_i(x)}{h}+\frac{\mathfrak{N}_i(x+h)-\mathfrak{N}_i(x)}{h}.$$

Ist insbesondere $s_i<x$, so ist nach (24) $D_+\{\mathfrak{F}_i(x)+\mathfrak{M}_i(x)\}\neq-\infty$ und damit schließt man über

$$(36)\qquad D_+O_\tau(x)\geqq D_+\{\mathfrak{F}_i(x)+\mathfrak{M}_i(x)\}$$

auf

$$(37)\qquad D_+O_\tau(x)\neq-\infty;$$

ebenso kann aus (25) die Abschätzung

$$(38)\qquad D_+O_\tau(x)\geqq f(x)$$

immer dann gefolgert werden, wenn x nicht zu $\mathfrak{S}$ gehört. Für $x=s_i$ selbst benutzt man die Abschätzung

$$(39)\qquad D_+O_\tau(s_i)\geqq D_+\{\mathfrak{F}_i(s_i)+\mathfrak{N}_i(s_i)\},$$

um mit (30) auf

$$(40)\qquad D_+O_\tau(s_i)\neq-\infty$$

zu schließen.

Durch das Gesagte ist für das Intervall $\langle a_\tau, b_\tau\rangle$ $D_+O_\tau(x)\neq-\infty$ ausnahmslos und $D_+O_\tau(x)\geqq f(x)$ bis auf $\mathfrak{D}(\langle a_\tau, b_\tau\rangle, \mathfrak{S})$ bewiesen. Im Induktionsbeweise ist also der ***Schluß auf τ vollständig***; ***die Existenz einer Oberfunktion $O(x)$ mit den eingangs geforderten Eigenschaften ist für das Intervall $\langle a, b\rangle$ gesichert.***

Auf den erledigten Existenzbeweis für Oberfunktionen wird die Frage nach ***Unterfunktionen*** (von vorgeschriebener Annäherung an die Integralfunktion $F(x)$) zurückgeführt durch Spiegelung an der x-Achse. Mit $f(x)$ ist nämlich auch $\bar{f}(x)=-f(x)$ integrabel DiL über $\langle a, b\rangle$, $\bar{F}(x)=-F(x)$

ist die Integralfunktion $Di\,L_a^x(\bar{f})$ und $U(x) = F(x) - \bar{Z}(x)$ hat die Eigenschaften einer Unterfunktion von $f(x)$, wenn $\bar{F}(x) + \bar{Z}(x)$ als Oberfunktion zu $\bar{f}(x)$ konstruiert wurde.

§ 3.

Bei der *Harnackschen Methode* der Definition uneigentlicher Integrale wird die (abgeschlossene) singuläre Menge $\mathfrak{S}$ als *nirgends dicht* angenommen. Zu jedem komplementären Intervall $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ soll ferner eine positive Konstante α_ν derart gehören, daß

$$\left| \int_{x_\nu'}^{x_\nu''} f(x)\,dx \right| \leqq \alpha_\nu$$

gilt, wie immer auch x_ν', x_ν'' innerhalb der Schranken der Einschließung $a_\nu < x_\nu' < x_\nu'' < b_\nu$ gewählt sein mögen. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ wird als konvergent vorausgesetzt. Weiter muß $Di\,L_{a_\nu}^{b_\nu}(f)$ für jedes ν als $\lim\limits_{\substack{x_\nu' \to a_\nu + 0 \\ x_\nu'' \to b_\nu - 0}} \int_{x_\nu'}^{x_\nu''} f(x)\,dx$ eindeutig bestimmt sein; die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} Di\,L_{a_\nu}^{b_\nu}(f)$ ist mit der von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ gegeben. Schließlich ist noch anzunehmen, daß $f(x)$ über die Menge $\mathfrak{S}$ summierbar ist. *Der Wert des Integrals über $\langle a, b \rangle$ wird* so definiert:

$$\text{(1)} \qquad Ha\,L_a^b(f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} Di\,L_{a_\nu}^{b_\nu}(f) + \int_{\mathfrak{S}} f(x)\,dx.$$

Mit $Ha\,L_a^b(f)$ existiert in $\langle a, b \rangle$ *eine stetige Integralfunktion*

$$\text{(2)} \qquad F(x) = Ha\,L_a^x(f).$$

Der Beweis des Satzes, daß eine Funktion $f(x)$, für die $Ha\,L_a^b(f)$ existiert, auch integrabel ist im Sinne der Definition S, und daß beide Definitionen dieselbe Integralfunktion bestimmen, besteht (wie der des entsprechenden Satzes für $Di\,L$-integrable Funktionen) *im wesentlichen im Nachweis einer Funktion $Z(x)$ mit den im Eingang von* § 2 *genannten Eigenschaften.*

Im Hinblick auf die Forderung $Z(b) < \frac{\varepsilon}{2}$ geben wir uns eine konvergente Reihe aus positiven Konstanten β_ν derart vor, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \frac{\varepsilon}{12}$

ist. Führen wir für $\alpha_\nu + \beta_\nu$ die Bezeichnung γ_ν ein, so ist auch $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ konvergent.

Definieren wir

$$(3) \quad \begin{cases} f_I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{auf } \mathfrak{R} \\ 0 & \text{auf } \mathfrak{S} \end{cases}, \quad f_{II}(x) = \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathfrak{R} \\ f(x) & \text{auf } \mathfrak{S} \end{cases} \\ \mathfrak{F}_\nu(x) = Di\, L^x_{a_\nu}(f_I) = Di\, L^x_{a_\nu}(f) \text{ in } \langle a_\nu, b_\nu \rangle \\ F_\nu(x) = \begin{cases} \mathfrak{F}_\nu(a_\nu) = 0 & \text{in } \langle a, a_\nu) \\ \mathfrak{F}_\nu(x) & \text{in } \langle a_\nu, b_\nu \rangle \\ \mathfrak{F}_\nu(b_\nu) & \text{in } (b_\nu, b \rangle \end{cases} \\ F_I(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x), \qquad F_{II}(x) = \int_a^x f_{II}(t)\,dt, \end{cases}$$

dann ist

$$(4) \qquad f(x) = f_I(x) + f_{II}(x),$$

und für die Integralfunktion $F(x)$ von $f(x)$ gilt entsprechend

$$(5) \qquad F(x) = F_I(x) + F_{II}(x).$$

Für das Intervall $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ übernehmen wir aus § 2 die Existenz einer stetigen *Zusatzfunktion* $\mathfrak{M}_\nu(x)$ *zu* $\mathfrak{F}_\nu(x)$ mit den Eigenschaften

$$(6) \qquad \mathfrak{M}_\nu(a_\nu) = 0, \qquad D_+ \mathfrak{M}_\nu(x) \geq 0, \qquad \mathfrak{M}_\nu(b_\nu) < \beta_\nu,$$

bezeichnen die Summe $\mathfrak{F}_\nu(x) + \mathfrak{M}_\nu(x)$ mit $\mathfrak{G}_\nu(x)$ und sind für die inneren Punkte von $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ sicher, daß

$$(7) \qquad D_+ \mathfrak{G}_\nu(x) \neq -\infty, \qquad D_+ \mathfrak{G}_\nu(x) \geq f_I(x)$$

gilt. Definieren wir dann weiter

$$(8) \quad \begin{cases} M_\nu(x) = \begin{cases} \mathfrak{M}_\nu(a_\nu) = 0 & \text{in } \langle a, a_\nu) \\ \mathfrak{M}_\nu(x) & \text{in } \langle a_\nu, b_\nu \rangle \\ \mathfrak{M}_\nu(b_\nu) & \text{in } (b_\nu, b \rangle \end{cases} \\ G_\nu(x) = \begin{cases} \mathfrak{G}_\nu(a_\nu) = 0 & \text{in } \langle a, a_\nu) \\ \mathfrak{G}_\nu(x) & \text{in } \langle a_\nu, b_\nu \rangle \\ \mathfrak{G}_\nu(b_\nu) & \text{in } (b_\nu, b \rangle \end{cases} \\ M(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu(x), \qquad G(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x), \end{cases}$$

so ist

$$(9) \qquad G(x) = F_I(x) + M(x)$$

und für (das stetige) $M(x)$ gilt

$$(10) \qquad M(a) = 0, \qquad D_+ M(x) \geq 0, \qquad M(b) < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Für *eine beliebige Stelle der Menge* $\mathfrak{R}$ schließt man aus (7) über die Darstellung $D_+ G(x) = D_+ G_m(x)$ (in der m einen von x abhängigen Index aus der Reihe der ν bedeutet)

$$D_+ G(x) \neq -\infty, \qquad D_+ G(x) \geqq f_l(x). \tag{11}$$

Die letzte Abschätzung kann man auch schon *für die Menge* $\mathfrak{S}$ *bis auf eine Restmenge* $\mathfrak{T}$ *vom Maße Null* beweisen. Definiert man nämlich

$$\left\{\begin{aligned} X_\nu(x) &= \begin{cases} 0 & \text{in } \langle a, a_\nu \rangle \\ \gamma_\nu & \text{in } (a_\nu, b\rangle \end{cases} \\ X(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu(x), \end{aligned}\right. \tag{12}$$

so gilt

$$|D_+ G(x)| \leqq D^+ X(x),$$

falls x eine Stelle aus $\mathfrak{S}$ ist. Die nähere Untersuchung der Funktion $X(x)$ selbst aber zeigt, daß diese in $\langle a, b\rangle$ bis auf eine Menge $\overline{\mathfrak{T}}$ vom Maße Null die eindeutige Derivierte Null hat[14]). Es gilt also gewiß

$$D_+ G(x) = 0$$

in $\mathfrak{S}$ bis auf $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{S}, \overline{\mathfrak{T}})$. Und da auf $\mathfrak{S}$ $f_l(x) = 0$ ist, so sind wir der Abschätzung

$$D_+ G(x) \geqq f_l(x) \tag{13}$$

in ganz $\langle a, b\rangle$ *bis auf die Menge* $\mathfrak{T}$ sicher.

Indem wir zu $G(x) = F(x) + M(x)$ noch *ein Glied von der Form* $\overline{N}(x) + N(x)$ hinzufügen, werden wir

$$D_+ \{G(x) + \overline{N}(x) + N(x)\} \neq -\infty$$

für ganz $\langle a, b\rangle$ erreichen. Für den Nachweis der Funktionen $\overline{N}(x)$ und $N(x)$ definieren wir zunächst

$$\left\{\begin{aligned} \overline{C}_\nu(x) &= \left\{\begin{matrix} G_\nu(a_\nu) = 0 & \text{in } \langle a, a_\nu\rangle \\ \dfrac{x - a_\nu}{b_\nu - a_\nu} G_\nu(b_\nu) & \text{in } (a_\nu, b_\nu) \\ G_\nu(b_\nu) & \text{in } \langle b_\nu, b\rangle \end{matrix}\right\} \quad (|\overline{C}_\nu(x)| \leqq \gamma_\nu) \\ C_\nu(x) &= G_\nu(x) - \overline{C}_\nu(x) \qquad\qquad (|C_\nu(x)| \leqq 2\gamma_\nu) \\ \overline{C}(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{C}_\nu(x), \qquad C(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu(x). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Aus $\overline{C}(x)$ und $C(x)$ setzt sich $G(x)$ zusammen

$$G(x) = \overline{C}(x) + C(x); \tag{15}$$

[14]) Vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig 1918), § 508 Satz 11, § 505 Satz 6.

für die Menge $\mathfrak{S}$ reduziert sich diese Darstellung auf $G(x) = \bar{C}(x)$, indem dort $C(x) = 0$ ist.

$\bar{C}(x)$ erweist sich als *totalstetig* in $\langle a, b\rangle$. Aus der Auffassung $\bar{C}(x) = \int\limits_a^x D\bar{C}(t)\,dt$ ergibt sich also nach § 1 die *Existenz einer stetigen Funktion* $\bar{N}(x)$ mit den Eigenschaften

$$\bar{N}(a) = 0, \qquad D_+\bar{N}(x) \geqq 0, \qquad \bar{N}(b) < \frac{\varepsilon}{12}, \tag{16}$$

durch deren Addition zu $\bar{C}(x)$

$$D_+\{\bar{C}(x) + \bar{N}(x)\} \neq -\infty \tag{17}$$

für das ganze Intervall $\langle a, b\rangle$ erreicht wird.

Um auch *zu* $C(x)$ *eine Funktion* $N(x)$ nachzuweisen, die so beschaffen ist, daß $D_+\{C(x) + N(x)\} \neq -\infty$ in $\langle a, b\rangle$ ausnahmslos gilt, konstruieren wir zuvor eine *Vergleichsfunktion* $K(x)$ zu $C(x)$. Für die Definition von $K(x)$ gehen wir auf die komplementären Intervalle zurück, legen in $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$ die Teilpunkte

$$\left\{\begin{array}{l} a_\nu^{(0)} = b_\nu^{(0)} = m_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu + b_\nu) \\ \left.\begin{array}{l} a_\nu^{(m)} = \frac{1}{2}(a_\nu + a_\nu^{(m-1)}) \\ b_\nu^{(m)} = \frac{1}{2}(b_\nu + b_\nu^{(m-1)}) \end{array}\right\} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \end{array}\right. \tag{18}$$

und fassen diese Punkte in den Bezeichnungen $a_\nu^{(n)}$, $b_\nu^{(n)}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ zusammen. Zur Konstruktion einer Funktion $\mathfrak{K}_\nu(x)$ in $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$ brauchen wir folgende Funktionswerte von $C_\nu(x)$

$$\left\{\begin{array}{l} k_\nu^{(0)} = \min(C_\nu(x);\, a_\nu \leqq x \leqq b_\nu) \\ l_\nu^{(n+1)} = \min(C_\nu(x);\, a_\nu \leqq x \leqq a_\nu^{(n)}) \\ r_\nu^{(n+1)} = \min(C_\nu(x);\, b_\nu^{(n)} \leqq x \leqq b_\nu) \\ k_\nu^{(n+1)} = \min(l_\nu^{(n+1)}, r_\nu^{(n+1)}). \end{array}\right. \tag{19}$$

Mit diesen definieren wir

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{K}_\nu(m_\nu) = k_\nu^{(0)} \\ \mathfrak{K}_\nu(a_\nu^{(n)}) = \mathfrak{K}_\nu(b_\nu^{(n)}) = k_\nu^{(n)} \\ \mathfrak{K}_\nu(a_\nu) = \mathfrak{K}_\nu(b_\nu) = 0 \\ \mathfrak{K}_\nu(x) = \mathfrak{K}_\nu(a_\nu^{(n)}) + (x - a_\nu^{(n)})\dfrac{\mathfrak{K}_\nu(a_\nu^{(n+1)}) - \mathfrak{K}_\nu(a_\nu^{(n)})}{a_\nu^{(n+1)} - a_\nu^{(n)}} \text{ in } (a_\nu^{(n+1)}, a_\nu^{(n)}) \\ \mathfrak{K}_\nu(x) = \mathfrak{K}_\nu(b_\nu^{(n)}) + (x - b_\nu^{(n)})\dfrac{\mathfrak{K}_\nu(b_\nu^{(n+1)}) - \mathfrak{K}_\nu(b_\nu^{(n)})}{b_\nu^{(n+1)} - b_\nu^{(n)}} \text{ in } (b_\nu^{(n)}, b_\nu^{(n+1)}). \end{array}\right. \tag{20}$$

Dann setzen wir weiter

$$(21)\qquad \begin{cases} K_\nu(x) = \begin{cases} \mathfrak{K}_\nu(a_\nu) = 0 & \text{in } \langle a,\ a_\nu) \\ \mathfrak{K}_\nu(x) & \text{in } \langle a_\nu,\ b_\nu\rangle \\ \mathfrak{K}_\nu(b_\nu) = 0 & \text{in } (b_\nu,\ b\rangle \end{cases} \\ K(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} K_\nu(x). \end{cases}$$

Man überzeugt sich, daß jede Funktion $K_\nu(x)$ in $\langle a, b\rangle$ totalstetig ist. Die gleiche Eigenschaft beweist man von $K(x)$. Aus der *Totalstetigkeit* von $K(x)$ aber schließt man wieder auf die *Existenz einer stetigen Funktion* $N(x)$ von der Beschaffenheit, daß

$$(22)\qquad D_+\{K(x)+N(x)\} \neq -\infty$$

in $\langle a, b\rangle$ ausnahmslos gilt; dazu können von $N(x)$ selbst noch die Eigenschaften

$$(23)\qquad N(a)=0,\quad D_+N(x)\geqq 0,\quad N(b)<\frac{\varepsilon}{12}$$

behauptet werden. Was die Funktion $N(x)$ in (22) für $K(x)$ leistet, kann man auf die Funktion $C(x)$, für die in ganz $\langle a, b\rangle$ die Beziehung $K(x)\leqq C(x)$ gilt, übertragen auf der Menge $\mathfrak{S}$. Für eine Stelle s schließt man nämlich über die Abschätzung

$$(24)\qquad \frac{\{K(s+h)+N(s+h)\}-\{K(s)+N(s)\}}{h} \leqq \frac{\{C(s+h)+N(s+h)\}-\{C(s)+N(s)\}}{h}$$

(in der h von vornherein auf positive Werte beschränkt ist) auf

$$(25)\qquad D_+\{K(s)+N(s)\} \leqq D_+\{C(s)+N(s)\}.$$

Hiermit aber folgt aus (22)

$$(26)\qquad D_+\{C(s)+N(s)\} \neq -\infty.$$

Nachdem wir festgestellt haben, was über die Zusatzglieder $M(x)$, $\overline{N}(x)$, $N(x)$ einzeln zu bemerken war, addieren wir sie untereinander

$$(27)\qquad Z_I(x) = M(x) + \overline{N}(x) + N(x)$$

und ihre Summe wieder zur Integralfunktion $F_I(x)$

$$(28)\qquad O_I(x) = F_I(x) + Z_I(x).$$

Die Funktion $O_I(x)$ schreiben wir nun einerseits in der Form

$$(29)\qquad O_I(x) = G(x) + \{\overline{N}(x) + N(x)\},$$

schließen *für eine Stelle aus* $\mathfrak{R}$

$$(30)\qquad D_+O_I(x) \geqq D_+G(x) + D_+\{\overline{N}(x)+N(x)\}$$

und folgern hieraus mit $D_+ G(x) \neq -\infty$ und $D_+\{\bar{N}(x) + N(x)\} \geq 0$

$$D_+ O_I(x) \neq -\infty \tag{31}$$

für eine Stelle der genannten Art. Da $D_+ G(x) \geq f_I(x)$ schon unter (13) bis auf eine (in $\mathfrak{S}$ enthaltene) Menge $\mathfrak{T}$ vom Maße Null bewiesen wurde, so können wir jetzt auch

$$D_+ O_I(x) \geq f_I(x) \tag{32}$$

für das Intervall $\langle a, b\rangle$ *bis auf die Menge* $\mathfrak{T}$ behaupten.

Andererseits zerlegen wir, um $D_+ O_I(x) \neq -\infty$ auch *für die Menge* $\mathfrak{S}$ zu beweisen, die Funktion $O_I(x)$ nach der Gleichung

$$O_I(x) = \{\bar{C}(x) + \bar{N}(x)\} + \{C(x) + N(x)\}. \tag{33}$$

Für eine Stelle aus $\mathfrak{S}$ gilt sowohl $D_+\{\bar{C}(x) + \bar{N}(x)\} \neq -\infty$ als auch $D_+\{C(x) + N(x)\} \neq -\infty$; mit

$$D_+ O_I(x) \geq D_+\{\bar{C}(x) + \bar{N}(x)\} + D_+\{C(x) + N(x)\} \tag{34}$$

folgt also das gewünschte Resultat für $\mathfrak{S}$. Hiermit aber und mit (31) ist

$$D_+ O_I(x) \neq -\infty \tag{35}$$

für das ganze Intervall $\langle a, b\rangle$ *ausnahmslos* bewiesen.

Zu $F_{II}(x) = \int\limits_a^x f_{II}(t)\,dt$ können wir uns nach § 1 eine stetige Funktion $Z_{II}(x)$ mit den Eigenschaften

$$Z_{II}(a) = 0, \quad D_+ Z_{II}(x) \geq 0, \quad Z_{II}(b) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{36}$$

und gleichzeitig so bestimmt denken, daß für

$$O_{II}(x) = F_{II}(x) + Z_{II}(x) \tag{37}$$

im Intervall $\langle a, b\rangle$

$$D_+ O_{II}(x) \neq -\infty, \quad D_+ O_{II}(x) \geq f_{II}(x) \tag{38}$$

ausnahmslos gilt.

Definieren wir dann schließlich

$$Z(x) = Z_I(x) + Z_{II}(x), \tag{39}$$

so sieht man, daß die Funktion $Z(x)$ stetig ist, und daß ihr auch die Eigenschaften,

$$Z(a) = 0, \quad D_+ Z(x) \geq 0, \quad Z(b) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{40}$$

der gesuchten endgültigen Zusatzfunktion $Z(x)$ (für $F(x)$) zukommen. Bildet man also die Summe

$$O(x) = F(x) + Z(x), \tag{41}$$

Dann setzen wir weiter

$$(21)\qquad \begin{cases} K_\nu(x) = \begin{cases} \mathfrak{K}_\nu(a_\nu) = 0 & \text{in } \langle a,\, a_\nu) \\ \mathfrak{K}_\nu(x) & \text{in } \langle a_\nu,\, b_\nu\rangle \\ \mathfrak{K}_\nu(b_\nu) = 0 & \text{in } (b_\nu,\, b\rangle \end{cases} \\ K(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} K_\nu(x). \end{cases}$$

Man überzeugt sich, daß jede Funktion $K_\nu(x)$ in $\langle a, b\rangle$ totalstetig ist. Die gleiche Eigenschaft beweist man von $K(x)$. Aus der *Totalstetigkeit* von $K(x)$ aber schließt man wieder auf die *Existenz einer stetigen Funktion* $N(x)$ von der Beschaffenheit, daß

$$(22)\qquad D_+\{K(x) + N(x)\} \neq -\infty$$

in $\langle a, b\rangle$ ausnahmslos gilt; dazu können von $N(x)$ selbst noch die Eigenschaften

$$(23)\qquad N(a) = 0, \quad D_+N(x) \geqq 0, \quad N(b) < \frac{\varepsilon}{12}$$

behauptet werden. Was die Funktion $N(x)$ in (22) für $K(x)$ leistet, kann man auf die Funktion $C(x)$, für die in ganz $\langle a, b\rangle$ die Beziehung $K(x) \leqq C(x)$ gilt, übertragen auf der Menge $\mathfrak{S}$. Für eine Stelle s schließt man nämlich über die Abschätzung

$$(24)\qquad \frac{\{K(s+h)+N(s+h)\}-\{K(s)+N(s)\}}{h} \leqq \frac{\{C(s+h)+N(s+h)\}-\{C(s)+N(s)\}}{h}$$

(in der h von vornherein auf positive Werte beschränkt ist) auf

$$(25)\qquad D_+\{K(s) + N(s)\} \leqq D_+\{C(s) + N(s)\}.$$

Hiermit aber folgt aus (22)

$$(26)\qquad D_+\{C(s) + N(s)\} \neq -\infty.$$

Nachdem wir festgestellt haben, was über die Zusatzglieder $M(x)$, $\overline{N}(x)$, $N(x)$ einzeln zu bemerken war, addieren wir sie untereinander

$$(27)\qquad Z_I(x) = M(x) + \overline{N}(x) + N(x)$$

und ihre Summe wieder zur Integralfunktion $F_I(x)$

$$(28)\qquad O_I(x) = F_I(x) + Z_I(x).$$

Die Funktion $O_I(x)$ schreiben wir nun einerseits in der Form

$$(29)\qquad O_I(x) = G(x) + \{\overline{N}(x) + N(x)\},$$

schließen *für eine Stelle aus* $\mathfrak{R}$

$$(30)\qquad D_+O_I(x) \geqq D_+G(x) + D_+\{\overline{N}(x) + N(x)\}$$

und folgern hieraus mit $D_+ G(x) \neq -\infty$ und $D_+\{\bar{N}(x)+N(x)\} \geqq 0$

$$(31)\qquad D_+ O_I(x) \neq -\infty$$

für eine Stelle der genannten Art. Da $D_+ G(x) \geqq f_I(x)$ schon unter (13) bis auf eine (in $\mathfrak{S}$ enthaltene) Menge $\mathfrak{T}$ vom Maße Null bewiesen wurde, so können wir jetzt auch

$$(32)\qquad D_+ O_I(x) \geqq f_I(x)$$

für das Intervall $\langle a, b\rangle$ *bis auf die Menge* $\mathfrak{T}$ behaupten.

Andererseits zerlegen wir, um $D_+ O_I(x) \neq -\infty$ auch *für die Menge* $\mathfrak{S}$ zu beweisen, die Funktion $O_I(x)$ nach der Gleichung

$$(33)\qquad O_I(x) = \{\bar{C}(x) + \bar{N}(x)\} + \{C(x) + N(x)\}.$$

Für eine Stelle aus $\mathfrak{S}$ gilt sowohl $D_+\{\bar{C}(x)+\bar{N}(x)\} \neq -\infty$ als auch $D_+\{C(x)+N(x)\} \neq -\infty$; mit

$$(34)\qquad D_+ O_I(x) \geqq D_+\{\bar{C}(x)+\bar{N}(x)\} + D_+\{C(x)+N(x)\}$$

folgt also das gewünschte Resultat für $\mathfrak{S}$. Hiermit aber und mit (31) ist

$$(35)\qquad D_+ O_I(x) \neq -\infty$$

für das ganze Intervall $\langle a, b\rangle$ *ausnahmslos* bewiesen.

Zu $F_{II}(x) = \int_a^x f_{II}(t)\,dt$ können wir uns nach § 1 eine stetige Funktion $Z_{II}(x)$ mit den Eigenschaften

$$(36)\qquad Z_{II}(a) = 0,\quad D_+ Z_{II}(x) \geqq 0,\quad Z_{II}(b) < \frac{\varepsilon}{4}$$

und gleichzeitig so bestimmt denken, daß für

$$(37)\qquad O_{II}(x) = F_{II}(x) + Z_{II}(x)$$

im Intervall $\langle a, b\rangle$

$$(38)\qquad D_+ O_{II}(x) \neq -\infty,\quad D_+ O_{II}(x) \geqq f_{II}(x)$$

ausnahmslos gilt.

Definieren wir dann schließlich

$$(39)\qquad Z(x) = Z_I(x) + Z_{II}(x),$$

so sieht man, daß die Funktion $Z(x)$ stetig ist, und daß ihr auch die Eigenschaften,

$$(40)\qquad Z(a) = 0,\quad D_+ Z(x) \geqq 0,\quad Z(b) < \frac{\varepsilon}{4}$$

der gesuchten endgültigen Zusatzfunktion $Z(x)$ (für $F(x)$) zukommen. Bildet man also die Summe

$$(41)\qquad O(x) = F(x) + Z(x),$$

so approximiert diese die Integralfunktion $F(x)$ in $\langle a, b\rangle$ gemäß der Einschließung

(42) $$0 \leqq O(x) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daß für $O(x)$ auch die Derivierten-Bedingungen der Oberfunktionen gelten, ergibt sich aus der Darstellung

(43) $$O(x) = O_I(x) + O_{II}(x)$$

über die Abschätzung

(44) $$D_+ O(x) \geqq D_+ O_I(x) + D_+ O_{II}(x).$$

Da nämlich $D_+ O_I(x) \neq -\infty$ und $D_+ O_{II}(x) \neq -\infty$ nach (35) bzw. (38) in $\langle a, b\rangle$ ausnahmslos gelten, gilt nach (44)

(45) $$D_+ O(x) \neq -\infty$$

ebenfalls in $\langle a, b\rangle$ durchweg. Weil in $\langle a, b\rangle$ $D_+ O_I(x) \geqq f_I(x)$ bis auf eine Menge $\mathfrak{T}$ vom Maße Null — vgl. (32) — und $D_+ O_{II}(x) \geqq f_{II}(x)$ ausnahmslos gilt, ferner $f(x) = f_I(x) + f_{II}(x)$ identisch besteht, so folgt wiederum mit (44)

(46) $$D_+ O(x) \geqq f(x)$$

für das Intervall $\langle a, b\rangle$ bis auf die Menge $\mathfrak{T}$.

§ 4.

In die Definition der Prozesse $Di\,L$ und $Ha\,L$ geht — wie bemerkt — vom Begriffe der Summierbarkeit nicht mehr ein als die Tatsache, daß $\int_a^b f(t)\,dt$ eine stetige Funktion definiert in jedem Intervall $\langle a, b\rangle$, über das $f(x)$ summierbar ist. Diese Bemerkung gestattet, ***die Methoden der beiden Prozesse in einer Definition durch transfinite Induktion zu verwerten.***

Der Integralbegriff ${}^{(0)}L$ wird mit dem der Summierbarkeit identifiziert. Die Formulierung der Existenzbedingungen für ein Integral ${}^{(\gamma)}L_a^b(f)$, in dem γ eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlklasse bedeutet, ***setzt voraus***:

1. ${}^{(\beta)}L$ ist definiert für jedes $\beta < \gamma$.
3. Ist $\beta_1 < \beta_2 < \gamma$ und existiert ${}^{(\beta_1)}L_a^b(f)$, so ist ${}^{(\beta_2)}L_a^b(f) = {}^{(\beta_1)}L_a^b(f)$.
3. Zu einer Funktion $f(x)$, für die ${}^{(\beta)}L_a^b(f)$ existiert, gehört eine stetige Integralfunktion ${}^{(\beta)}L_a^x(f)$.

Ist γ ***Limeszahl***, so heißt eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ definierte Funktion $f(x)$ integrabel ${}^{(\gamma)}L$, wenn unter den Ordinalzahlen $\beta < \gamma$ ein α vor-

handen ist, für das ${}^{(\alpha)}L_a^b(f)$ existiert. In diesem Falle wird per definitionem

$$ {}^{(\gamma)}L_a^b(f) = {}^{(\alpha)}L_a^b(f) $$

gesetzt. Nun sei aber γ ***eine Zahl*** 1. ***Art*** und $f(x)$ eine Funktion, für die ${}^{(\gamma-1)}L_a^b(f)$ noch nicht existiert. Die Menge $\mathfrak{S}$, gebildet von den gegenüber der Integration ${}^{(\gamma-1)}L$ singulären Stellen des Intervalls — sie ist ihrem Begriffe nach abgeschlossen —, wird als abzählbar vorausgesetzt. Wenn dann ***die Anwendung des Dinischen Prozesses*** die Überwindung der singulären Menge gestattet, wird der Integralwert mit $Di\,{}^{(\gamma-1)}L_a^b(f)$ bezeichnet; mit $Di\,{}^{(\gamma-1)}L_a^b(f)$ existiert $Di\,{}^{(\gamma-1)}L_a^x(f)$ in $\langle a, b\rangle$ als stetige Funktion. Falls auch $Di\,{}^{(\gamma-1)}L_a^b(f)$ noch nicht existiert, können wir nach der ***Anwendbarkeit des Harnackschen Prozesses*** fragen, wenn die gegenüber der Integration $Di\,{}^{(\gamma-1)}L$ singuläre Menge $\overline{\mathfrak{S}}$ nirgends dicht liegt, und das über eine Teilmenge $\overline{\mathfrak{T}}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ erstreckte Integral $Di\,{}^{(\gamma-1)}L(f, \overline{\mathfrak{T}})$ als gleichbedeutend mit ${}^{(0)}L(f, \overline{\mathfrak{T}})$ definiert wird. Führt der Harnacksche Prozeß auf den bezeichneten Grundlagen zu einem Integralwert für $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$, so wird er mit

$$ Ha\,Di\,{}^{(\gamma-1)}L_a^b(f) = {}^{(\gamma)}L_a^b(f) $$

bezeichnet; mit ${}^{(\gamma)}L_a^b(f)$ existiert ${}^{(\gamma)}L_a^x(f)$, und zwar ist diese Funktion wieder stetig in $\langle a, b\rangle$. — Der Definition ${}^{(\gamma)}L$ ordnet sich übrigens die Definition $Di\,{}^{(\gamma-1)}L$ der Art unter, daß eine im Sinne der letzteren integrable Funktion auch integrabel ist im Sinne der ersten; ferner ist jede Funktion, die integrabel ist im Sinne der Voraussetzung des Induktionsschlusses, gleichfalls integrabel ${}^{(\gamma)}L$.

Eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ definierte Funktion heißt ***integrabel im Sinne der Definition De L***, wenn eine Ordinalzahl γ vorhanden ist, für welche ${}^{(\gamma)}L(f)$ existiert.

Von diesem Integralbegriff De L ist zu zeigen, daß er sich in seinem ganzen Umfange der Definition S unterordnet.

Wenn zunächst eine Funktion in einem Intervall integrabel ${}^{(0)}L$ ist, dann ist sie nach § 1 schon integrabel im Sinne der Definition S^*, also gewiss im Sinne der Definition S. Für den Schluß auf γ ***nehmen wir als bewiesen an***: Ist $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ integrabel ${}^{(\beta)}L$ mit einem $\beta < \gamma$, so ist $f(x)$ auch integrabel S, und zwar ist $S(x) = {}^{(\beta)}L_a^x(f)$. Im Falle, daß γ Limeszahl ist und $f(x)$ eine Funktion bedeutet, für die ${}^{(\gamma)}L_a^b(f)$ existiert, ist mit der angeführten Voraussetzung gegeben, was im andern Falle zu beweisen ist. Es sei also nun γ eine Zahl 1. Art und $f(x)$ eine in $\langle a, b\rangle$

definierte Funktion, für die zwar ${}^{(\nu-1)}L_a^b(f)$ noch nicht existiert, der aber durch nochmalige Anwendung des Dinischen Prozesses ein Integralwert $Di\,{}^{(\nu-1)}L_a^b(f)$ zugeordnet werden kann. Dann ist auf Grund der obigen Voraussetzung *nach dem in* § 2 *ausgeführten Verfahren* zu zeigen: Zu vorgegebenem $\varepsilon(>0)$ existieren zwei Funktionen $O(x)$, $U(x)$, denen die Eigenschaften (I) — (IV) der Ober- bzw. Unterfunktionen zukommen, und deren Verlauf in $\langle a, b\rangle$ sich dem der Integralfunktion

$$F(x) = Di\,{}^{(\nu-1)}L_a^x(f)$$

folgendermaßen anschließt:

$$\begin{cases} 0 \leqq O(x) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 \leqq F(x) - U(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Ist $f(x)$ integrabel ${}^{(\nu)}L$, ohne daß schon $Di\,{}^{(\nu-1)}L_a^b(f)$ existiert, dann ist der entsprechende Nachweis *nach dem Verfahren des Existenzbeweises von* § 3 zu erbringen.

(Eingegangen am 12. 8. 1920.)

Über die Schwarzsche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven konstanter Krümmung.

Von

Axel Schur in Münster i. W.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung einem Hinweis von Herrn Hilbert auf einen Satz über Kurven konstanter Krümmung, den Herr H. A. Schwarz im Jahre 1884 gefunden, aber bisher nicht veröffentlicht hat, und den ich so formulieren will:

Jeder nichtebene Kurvenbogen konstanter Krümmung $\frac{1}{R}$ *über einer Sehne* $\mathfrak{s} < 2R$ *ist entweder kürzer als der kleinere oder länger als der größere Bogen des Kreises vom Radius R über der gegebenen Sehne.*

Bei dem Versuche, von diesem Satze, von dem mir zunächst nur der Wortlaut bekannt war, einen geometrischen Beweis zu geben, bin ich auf den folgenden allgemeinen Satz geführt worden:

Verbiegt man eine ebene doppelpunktlose Kurve, die mit ihrer Sehne einen konvexen geschlossenen doppelpunktlosen Linienzug bildet, so wird dabei die Sehne länger,

von dem sich dann der Schwarzsche Satz auf Grund gewisser elementarer Eigenschaften des Kreises als eine einfache Folge ergibt. Unter Verbiegung einer Kurve wollen wir im Anschluß an die Verbiegung ihrer Tangentenfläche eine Operation verstehen, bei der die Längen und Winkel ihrer Linienelemente erhalten bleiben. Ist die Kurve stetig gekrümmt, so kommt diese Forderung auf die Invarianz der Krümmung hinaus. Die vorstehende Definition läßt jedoch auch Unstetigkeiten der Krümmung zu, wenn nur bei Festlegung eines Durchlaufungssinnes jeder Punkt eine bestimmte Tangente und der Winkel zwischen den benachbarten Tangenten in jedem Punkte der Kurve einen bestimmten Wert hat, so daß auch Ecken als reguläre Punkte im Sinne dieser Definition gelten. Als konvexe Kurve bezeichnen wir dann eine derartige, für die der Winkel zwischen benachbarten Tangenten höchstens gleich 180° ist.

Bei dem Beweise des Satzes, der als einzigen Hilfssatz den folgenden ganz elementaren voraussetzt:

In einem Dreieck ist jede Seite größer oder mindestens gleich der Differenz und kleiner oder höchstens gleich der Summe der beiden anderen, werden wir der Anschaulichkeit halber zunächst Polygone mit endlicher Seitenzahl betrachten und an ihnen ein Rekursionsverfahren ausbilden, das sich auf Polygone mit unendlich vielen Seiten, durch die ja jede stetig gekrümmte Kurve angenähert werden kann, übertragen läßt.

§ 1.
Beweis des Hauptsatzes.

Es sei ein offenes ebenes doppelpunktloses Polygon $AP_1P_2\ldots P_nB$ vorgelegt. Seine Seiten bezeichnen wir mit $s_i = P_iP_{i+1}$, ihre Schnittpunkte mit der Geraden AB, der Sehnengeraden, mit S_i. Nun möge voraussetzungsgemäß das geschlossene Polygon $AP_1P_2\ldots P_nBA$ konvex und doppelpunktlos sein. Dann liegen alle Punkte S_i auf den Verlängerungen der Sehne $\overline{AB}$ und verbinden die Punkte A und B durch einen Streckenzug $AS_1S_2\ldots S_{n-1}B$, der ganz auf der Geraden AB liegt und ebenfalls durch die Strecke $\overline{AB}$ geschlossen wird. Nun läßt sich zeigen, daß bei einer Verbiegung des Polygons $AP_1P_2\ldots P_nB$ in ein anderes $A'P_1'P_2'\ldots P_{n-2}'P_{n-1}'P_nB$ der Streckenzug $AS_1S_2\ldots S_{n-2}S_{n-1}B$ in einen Streckenzug $A'S_1'S_2'\ldots S_{n-2}'S_{n-1}B$ übergeht, so daß entsprechende Teilstrecken dieselbe Länge haben, aber nicht mehr alle auf einer Geraden liegen.

Nach der in der Einleitung gegebenen Definition der Verbiegung als einer Operation, bei der die Seiten und Winkel des Polygons erhalten bleiben sollen, kann nämlich eine Verbiegung nur bestehen in einer Anzahl von Drehungen der starren Ebenen $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ durch je drei aufeinanderfolgende Ecken gegen die Ebenen $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ um die gemeinsamen Seiten P_iP_{i+1} durch vorgeschriebene Winkel ϑ_i, die Torsionswinkel. Die Gestalt des verbogenen Polygons, d. h. die relative Lage seiner Teile zueinander ohne Rücksicht auf die absolute Lage gegen ein festes Bezugssystem, ist unabhängig von der Reihenfolge, in der wir die verschiedenen Drehungen nacheinander ausführen. Wir können also diese Drehungen in der Reihenfolge vornehmen, wie ihre Drehachsen bei der von uns gewählten Umlaufungsrichtung des Polygons aufeinanderfolgen.

Gemäß dieser Festsetzung besteht die erste Teiloperation in einer Drehung der Ebene AP_1P_2 um P_1P_2 gegen die Ebene $P_1P_2\ldots P_nB$ durch den Winkel ϑ_1. Dabei bleiben alle Abstände in der Ebene AP_1P_2 unverändert. Der Punkt A wird also in einen Punkt A' übergeführt, der

vom Punkte S_1 auf P_1P_2 den Abstand $\overline{S_1A'} = \overline{S_1A}$ hat, aber nicht mehr auf der Geraden S_1B liegt. Dann folgt aus der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$(1) \qquad \overline{A'B} > \overline{S_1B} - \overline{S_1A'} = \overline{S_1B} - \overline{S_1A} = \overline{AB}.$$

Bei der zweiten Drehung wird die Ebene $P_1P_2P_3$ gegen die Ebene $P_2P_3 \ldots P_nB$ durch einen Winkel ϑ_2 um die Gerade P_2P_3 gedreht, während die Ebene $A'P_1P_2$ in ihrer Lage gegen die Ebene $P_1P_2P_3$ bleibt. Also behalten auch die Punkte der beiden Ebenen ihre gegenseitigen Abstände und der Punkt A' geht in einen Punkt A'' über, der von dem Punkte S_2 auf P_2P_3 den Abstand $\overline{S_2A''} = \overline{S_2A'}$ hat. Nun ist aber nach der zweiten Aussage des Hilfssatzes, wenn S_2 auf der gleichen Seite von A liegt wie S_1:

$$(2) \qquad \overline{S_2A'} < \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A'} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A} = \overline{S_2A},$$

da $\overline{S_2S_1}$ und $\overline{S_1A'}$ nicht mehr auf einer Geraden liegen. Aus dieser Formel folgt im Verein mit der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$(3) \qquad \overline{A''B} \geqq \overline{S_2B} - \overline{S_2A''} = \overline{S_2B} - \overline{S_2A'} > \overline{S_2B} - \overline{S_2A} = \overline{AB}.$$

Bei der nächsten Drehung der Ebene $P_2P_3P_4$ gegen die Ebene $P_3P_4 \ldots P_nB$ um die Gerade P_3P_4 durch einen Winkel ϑ_3 werden gleichzeitig die beiden Ebenen $A''P_1'P_2$ und $P_1'P_2P_3$ in ihrer relativen Lage zur Ebene $P_2P_3P_4$ mitgeführt. Es bleiben also die Abstände ihrer Punkte erhalten und A'' geht in einen Punkt A''' über, dessen Abstand von dem Punkte S_3 auf P_3P_4 $\overline{S_3A'''} = \overline{S_3A''}$ ist. Dann folgt aus (2) und der zweiten Aussage des Hilfssatzes, wenn wieder S_2 und S_3 auf der gleichen Seite von A liegen:

$$(4) \qquad \overline{S_3A''} \leqq \overline{S_3S_2} + \overline{S_2A''} < \overline{S_3S_2} + \overline{S_2A} = \overline{S_3A},$$

und hieraus nach der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$(5) \qquad \overline{A'''B} \geqq \overline{S_3B} - \overline{S_3A'''} = \overline{S_3B} - \overline{S_3A''} > \overline{S_3B} - \overline{S_3A} = \overline{AB}.$$

Dies Schlußverfahren kann man nun schrittweise fortsetzen, solange die Punkte S_i auf der Verlängerung $\overleftarrow{AB}$ von $\overline{AB}$ über A hinaus liegen, und erhält die folgenden Rekursionsformeln:

$$(\mathrm{A}) \qquad \overline{S_iA^{(i)}} = \overline{S_iA^{(i-1)}},$$

$$(\mathrm{B}) \qquad \overline{S_iA^{(i-1)}} \leqq \overline{S_iS_{i-1}} + \overline{S_{i-1}A^{(i-1)}} < \overline{S_iS_{i-1}} + \overline{S_{i-1}A} = \overline{S_iA},$$

$$(\mathrm{C}) \qquad \overline{A^{(i)}B} \geqq \overline{S_iB} - \overline{S_iA^{(i)}} = \overline{S_iB} - \overline{S_iA^{(i-1)}} > \overline{S_iB} - \overline{S_iA} = \overline{AB}.$$

Denn dann sind alle Strecken zwischen Buchstaben ohne oberen Index gleichgerichtet.

Nun sei S_k der letzte Punkt S_i auf $\overleftarrow{AB}$, so daß also S_{k+1} auf $\overrightarrow{AB}$, der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus, liegt. Da die Beziehung (C) nun für jeden Punkt der Geraden AB gilt, der durch A von S_k getrennt ist, so folgt aus ihr auch:

$$(6) \qquad \overline{A^{(k)}S_{k+1}} > \overline{AS_{k+1}}.$$

Dann ist:

$$(7) \qquad \overline{A^{(k+1)}S_{k+1}} = \overline{A^{(k)}S_{k+1}},$$

und nach der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \overline{A^{(k+1)}B} &\geqq \overline{A^{(k+1)}S_{k+1}} - \overline{BS_{k+1}} \\ &= \overline{A^{(k)}S_{k+1}} - \overline{BS_{k+1}} > \overline{AS_{k+1}} - \overline{BS_{k+1}} = \overline{AB}. \end{aligned}$$

Gehen wir nun zur nächsten Drehung um $P_{k+2}P_{k+3}$ über, so ergibt sich zunächst wieder $\overline{A^{(k+2)}S_{k+2}} = \overline{A^{(k+1)}S_{k+2}}$ und:

$$(9) \qquad \overline{A^{(k+1)}S_{k+2}} \geqq \overline{A^{(k+1)}S_{k+1}} - \overline{S_{k+2}S_{k+1}} > \overline{AS_{k+1}} - \overline{S_{k+2}S_{k+1}} = \overline{AS_{k+2}},$$

wo wieder die Strecken zwischen Punkten ohne obere Indizes gleichgerichtet sind. Hieraus folgt dann:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \overline{A^{(k+2)}B} &\geqq \overline{A^{(k+2)}S_{k+2}} - \overline{BS_{k+2}} \\ &= \overline{A^{(k+1)}S_{k+2}} - \overline{BS_{k+2}} > \overline{AS_{k+2}} - \overline{BS_{k+2}} = \overline{AB}. \end{aligned}$$

Nach dem Schema (9), (10) kann man nun für alle weiteren Punkte S_i auf $\overrightarrow{AB}$ schrittweise weiter schließen und erhält so die Rekursionsformeln:

$$(\mathrm{A}') \qquad \overline{A^{(i)}S_i} = \overline{A^{(i-1)}S_i},$$

$$(\mathrm{B}') \qquad \overline{A^{(i-1)}S_i} \geqq \overline{A^{(i-1)}S_{i-1}} - \overline{S_iS_{i-1}} > \overline{AS_{i-1}} - \overline{S_iS_{i-1}} = \overline{AS_i},$$

$$(\mathrm{C}') \qquad \overline{A^{(i)}B} \geqq \overline{A^{(i)}S_i} - \overline{BS_i} = \overline{A^{(i-1)}S_i} - \overline{BS_i} > \overline{AS_i} - \overline{BS_i} = \overline{AB}.$$

Aus den Relationen (A), (B), (C) und (A′), (B′), (C′) folgt dann für jede Verbiegung eines konvexen Polygons, durch die A in einen Punkt $A^{(i)}$ übergeht, die Beziehung:

$$\overline{A^{(i)}B} > \overline{AB}.$$

Da man nun den Beweis mit Hilfe der Rekursionsformeln (A) — (C) und (A′) — (C′) auf Polygone mit beliebig vielen Seiten und Biegungen, die aus beliebig vielen Drehungen um diese bestehen, ausdehnen kann und jede stetig gekrümmte Kurve durch derartige Polygone angenähert werden kann ergibt sich der Satz:

Verbiegt man eine ebene konvexe doppelpunktlose Kurve, die mit ihrer Sehne einen konvexen geschlossenen doppelpunktlosen Linienzug bildet, so wird ihre Sehne länger.

Die wesentliche Grundlage des Beweises bildet die Formel (2). Aus ihr ergeben sich schrittweise alle weiteren Ungleichungen, ohne daß ein wesentlich neues Element in die Beweisführung eintritt. Darin kommt die Tatsache zum Ausdruck, daß die durch eine erste Drehung herbeigeführte Verlängerung der Sehne durch keine Drehung um eine andere Seite des Polygons wieder völlig rückgängig gemacht werden kann, sondern nur durch vollständige Ausbreitung in die Ebene.

§ 2.
Der Schwarzsche Satz.

In dem in der Einleitung erwähnten Satz von H. A. Schwarz über Kurven konstanter Krümmung ist nun die Fragestellung gewissermaßen umgekehrt zu unserer bisherigen. Schwarz vergleicht nicht die Sehnenlängen verschiedener Kurven von gleicher Bogenlänge und Krümmung, sondern die Bogenlängen von Kurven derselben Krümmung über gegebener Sehne. Stellt man das hierhergehörige Extremalproblem für den Fall konstanter Krümmung, so findet man zunächst durch Ansetzen der Lagrangeschen Gleichungen, daß, wenn man die Kurve keinen weiteren Bedingungen unterwirft, die Extremalbögen über einer gegebenen Sehne ebene Kurven, also Kreisbögen sind. Schwieriger ist die Frage, was für ein Extremum vorliegt. Und diese wird eben durch den Schwarzschen Satz dahin entschieden, daß von den beiden Bögen, in die der Kreis durch eine Sehne zerlegt wird, der kürzere ein relatives Maximum und der größere ein relatives Minimum darstellt.

Mit Hilfe des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes gelangen wir durch die folgenden Überlegungen zum Schwarzschen Satz. Da der Kreis die einzige ebene Kurve konstanter Krümmung ist[1]), so kann jede nichtebene Kurve konstanter Krümmung durch Verbiegung aus einem ein- oder mehrfach überdeckten Kreis abgeleitet werden. Nun können wir zunächst Bögen konstanter Krümmung, die länger als der Kreisumfang sind, von der weiteren Betrachtung ausschließen, da diese jedenfalls länger sind als jeder Teilbogen des Kreises, also der zweiten Aussage des Schwarzschen Satzes entsprechen. Aus dem Satze des vorigen Paragraphen folgt dann zunächst, daß nur solche Bögen des Kreises durch Verbiegung in

[1]) Vgl. etwa Cesàro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie (1901), S. 4; oder: Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, 2. Auflage (1910), Bd. 1, S. 51 u. S. 391.

nichtebene Bögen konstanter Krümmung $\frac{1}{R}$ über einer Sehne $\mathfrak{s} < 2R$ übergeführt werden können, denen eine Sehne $\mathfrak{s}' < \mathfrak{s}$ zugehört, da jeder Kreisbogen eine Kurve von der in dem Hilfssatz betrachteten Art ist und also bei einer Verbiegung seine Sehne verlängert. Nun wächst für $0 < S < R\pi$ die Sehne $\mathfrak{s}'$ des Kreises mit dem Bogen s, während sie für $R\pi < s < 2R\pi$ mit wachsendem Bogen abnimmt. Daraus ergibt sich, daß Sehnen kleiner als $\mathfrak{s}$ nur zu derartigen Bögen des Kreises gehören können, die entweder kürzer als der kleinere Kreisbogen $s_1 < R\pi$ oder länger als der größere Kreisbogen $s_2 > R\pi$ über der gegebenen Sehne $\mathfrak{s} < 2R$ sind. Dies besagt aber gerade der Schwarzsche Satz:

Jeder nichtebene Kurvenbogen konstanter Krümmung $\frac{1}{R}$ über einer Sehne $\mathfrak{s} < 2R$ ist entweder kürzer als der kleinere oder länger als der größere Bogen des Kreises vom Radius R über der gegebenen Sehne.

Es mag noch hinzugefügt werden, daß der Halbkreis unter den Bögen konstanter Krümmung über dem Durchmesser keinen Extremwert darstellt. Denn es gibt unter den unendlich benachbarten Kreisbögen sowohl längere als kürzere, denen eine kürzere Sehne als der Durchmesser zugehört.

Aus dem Schwarzschen Satze und unserem allgemeinen Satze kann man endlich noch die folgenden Sätze über die Unverbiegbarkeit einer Ebene ableiten:

Gibt man in einer Ebene einen Kreisbogen vor und fordert, daß derselbe seine Krümmung und seine Sehnenlänge bewahren soll, so ist die Ebene starr.

Und allgemein:

Gibt man in einer Ebene eine doppelpunktlose Kurve vor, die mit ihrer Sehne einen geschlossenen konvexen doppelpunktlosen Linienzug bildet, und fordert, daß diese ihre Krümmung und Sehnenlänge behalten soll, so ist die Ebene starr.

Der innere Grund für diese Sätze ebenso wie für den zunächst überraschenden Schwarzschen Satz dürfte in der in unserm Hauptsatze ausgesprochenen Minimaleigenschaft der ebenen konvexen Kurven bezüglich der Sehne liegen.

(Eingegangen am 4. 10. 1920.)

Der Unabhängigkeitssatz für Doppelintegrale.

Von

K. Boehm in Karlsruhe i. B.

In einer Note, welche Herr David Hilbert der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorzulegen die Güte hatte[1]), konnte ich dem zu größter Allgemeinheit gestalteten Unabhängigkeitssatze für einfache Integrale eine Herleitung geben, welche von anderen, mir bekannten, Darstellungen abweicht. Der dort angedeutete Gedankengang läßt sich, wie im folgenden an einem Beispiel gezeigt werden soll, auf Integrale übertragen, welche sich über mehrfach ausgedehnte Bereiche erstrecken, wenn man nur die Begriffe heranzieht, welche Herr Vito Volterra in seiner Theorie der Funktionen von Linien so glänzend entwickelt hat.

Um eine Vorstellung meines Verfahrens zu geben, ohne allzu weitläufig zu werden und den Leser durch schwer zu übersehende Formeln zu ermüden, beschränke ich mich hier auf die Betrachtung von Doppelintegralen, und zwar auf den einfachsten Fall, welcher sich bei solchen darbietet[2]).

[1]) Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1915.

[2]) Die vorliegende Mitteilung war bereits von der Schriftleitung der Mathematischen Annalen angenommen, als mich Fräulein Emmy Noether auf die Inaugural-Dissertation des Herrn Georg Prange (Göttingen, 1915) aufmerksam machte, sie war bereits gedruckt, ehe es mir möglich wurde, einen Einblick in diese vortreffliche Arbeit zu gewinnen, welche *„Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale"* entwickelt und den Beweis für den Unabhängigkeitssatz ebenfalls liefert. Die Ähnlichkeit unserer Untersuchungen besteht in der folgerichtigen Verwendung der von Herrn Volterra geschaffenen Begriffe, welche sich jedem auf diesem Gebiete Arbeitenden als natürliche Hilfsmittel anbieten; doch werden die „funktionalen Ableitungen" des Doppelintegrales von mir auf eine eigene Weise gebildet, welche auch von dem Leser keine Kenntnis der Volterraschen Methode voraussetzt. Wesentlich aber scheint mir der Unterschied, daß Herr Prange, seinem Ziele entsprechend, von vornherein das Extremalenintegral im Auge hat, während ich die Untersuchung zunächst

1.

Es sei z eine beliebig zu wählende reelle Funktion zweier reeller Veränderlichen x und y, für welche die Existenz und Stetigkeit der Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung gefordert werde; ihr geometrisches Bild wollen wir als Fläche F bezeichnen. Bedeutet

(1) $$f(x, y, z, z'_x, z'_y) \qquad \left[z'_x = \frac{\partial z}{\partial x},\; z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

eine gegebene reelle stetige Funktion der angeschriebenen Argumente, so wird das, über das Innere einer geschlossenen Kurve c der xy-Ebene erstreckte Doppelintegral

(2) $$w = \iint\limits_{(c)} f(u, v, z, z'_u, z'_v)\, du\, dv \qquad \left[z'_u = \frac{\partial z}{\partial u},\; z'_v = \frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

in seinem Werte wesentlich von der Funktion z abhängen, und zwar von der Gesamtheit aller Werte, welche z innerhalb des von c umschlossenen Bereiches annimmt. w ist also *„Funktion einer Fläche F"*, in der durch Herrn Volterra geschaffenen Bedeutung dieses Ausdrucks. Wir können dies schreiben:

(3) $$w = \Phi \,|\, [\underset{(c)}{F}] \,|.$$

Wird auch die das Gebiet der Integration begrenzende Kurve (c) als veränderlich angesehen, so erscheint w *zugleich als Funktion einer Fläche und einer Linie*; diese Art der Abhängigkeit könnte durch das Symbol

(4) $$w = \Phi \,|\, [\underset{(c)}{F}, c] \,|$$

zum Ausdruck gebracht werden.

Wir denken uns nun eine Mannigfaltigkeit $(\mathfrak{M})$ von Flächen F so definiert, daß durch jede geschlossene Raumkurve (C) eine einzige Fläche aus $(\mathfrak{M})$ hindurchgeht. Eine solche Mannigfaltigkeit kann, zum Beispiel, durch die Lösungen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den unabhängigen Veränderlichen x, y und der abhängigen Veränderlichen z gegeben sein. F — das heißt z — ist Funktion der Raumkurve C, was wir durch eines der Symbole

(5) $$F = F \,|\, [C] \,| \quad \text{oder} \quad z = z \,|\, [u, v, C] \,|$$

andeuten können.

im Sinne meiner Göttinger Note auf ein allgemeines Integral einstelle und daher auch die Bedingungen angeben kann, unter welchen die Euler-Lagrangeschen Gleichungen für eine Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher *identisch* erfüllt sind. Gerade diese Frage, für welche sich Fräulein Dr. Noether interessierte, hatte mir die Veranlassung geboten, aus dem Kreise der mich seit 1912 beschäftigenden Untersuchungen diesen Ausschnitt ans Licht zu geben.

Die Projektion jener die Fläche F (das heißt die Funktion z) bestimmenden Randkurve C auf die xy-Ebene sei die Grenzkurve unseres Integrationsbereiches.

Das Doppelintegral (2) selbst ist durch diese Bestimmung eine Funktion der Randkurve C geworden. Wir müssen nun untersuchen, in welcher Weise sich sein Wert ändert, wenn die Randkurve C gewisse Veränderungen erleidet.

2.

Zunächst ersetzen wir die Kurve C durch eine benachbarte Kurve $\bar{C}$, welche, wie jene, auf dem in c senkrecht zur xy-Ebene errichteten Zylinder liegt.

Welches ist der zu der Randkurve $\bar{C}$ gehörige Wert $w_{\bar{C}}$ des Integrales w? Da $\bar{C}$ und C die gleiche Projektion c in der xy-Ebene haben, so ist das Doppelintegral über denselben Bereich zu erstrecken, wie in (2), nur mit einer anderen Funktion z, welche wir mit $\bar{z}$ bezeichnen wollen, um die Zugehörigkeit zu der Randkurve $\bar{C}$ anzudeuten. Erinnern wir uns an das Symbol (5), so besagt dies, daß wir setzen:

$$\bar{z} = z\,|\,[u, v, \bar{C}]\,|, \tag{6}$$

$$w_{\bar{C}} - w_C = \iint\limits_{(c)} \{f(u, v, \bar{z}, \bar{z}'_u, \bar{z}'_v) - f(u, v, z, z'_u, z'_v)\}\, du\, dv. \tag{7}$$

Diese Differenz wird, in erster Annäherung, durch die entsprechende Variation des Doppelintegrales (2) wiedergegeben, wenn die Kurven C und $\bar{C}$ sich einander annähern. Nach dem gewohnten Verfahren der Variationsrechnung erhält man aber, wenn die partiellen Integrationen gleich ausgeführt werden,

$$\delta w = \int\limits_{(c)} (f'_{z'_u} dv - f'_{z'_v} du)\,\delta z + \iint\limits_{(c)} \Big(f'_z - \frac{d}{du}(f'_{z'_u}) - \frac{d}{dv}(f'_{z'_v})\Big)\, du\, dv\, \delta z \tag{8}$$

$$[\delta z = z\,|\,[u, v, \bar{C}]\,| - z\,|\,[u, v, C]\,|\,],$$

wo das erste Integral als Linienintegral über die Kurve c, das zweite als Flächenintegral über den von c begrenzten Bereich der xy-Ebene zu erstrecken ist.

3.

Nun werde auf der durch C bestimmten Fläche $F\,|\,[C]\,|$ eine zu C benachbarte Kurve C_1 angenommen, deren Projektion auf die xy-Ebene entsprechend mit c_1 bezeichnet werden möge. Die Differenz der beiden zu C und C_1 gehörigen Werte des Integrales (2) ist

$$w_{C_1} - w_C = \iint\limits_{(c, c_1)} f(u, v, z, z'_u, z'_v)\, du\, dv, \tag{9}$$

wobei das rechts angeschriebene Integral über den von c und c_1 begrenzten Streifen der xy-Ebene erstreckt werden muß. Für z und die Ableitungen dieser Funktion sind die der Fläche $F|[C]|$ entsprechenden Werte einzusetzen.

Wir ziehen jetzt von jedem Punkte (x, y) der Kurve c eine Normale zu dieser bis zum Schnitt (x_1, y_1) mit der Kurve c_1. Hierdurch sind die Punkte der beiden Kurven c und c_1, und damit auch die Punkte der Kurven C und C_1, eindeutig aufeinander bezogen, und zwar ist

$$\Delta z = z_1 - z = \frac{\partial z}{\partial n} dn + \omega\, dn, \tag{10}$$

wobei $\frac{\partial z}{\partial n}$ dem Fortschreiten auf der Fläche $F|[C]|$ in der zur xy-Ebene und zu der Kurve c senkrechten Ebene entspricht, ω aber eine mit dn zugleich gegen Null konvergierende Funktion bedeutet, so daß durch

$$dz = \frac{\partial z}{\partial n} dn \tag{11}$$

das jenem Fortschreiten entsprechende Differential für die Randpunkte gekennzeichnet ist.

Eine dritte Raumkurve $\bar{C}$ wird erhalten, wenn man jedem Punkte (x, y) der Kurve c die z-Ordinate z_1 gibt, welche mit x_1, y_1 zusammen einen Punkt von C_1 liefert. Diese Kurve kann auch so beschrieben werden: Man errichte auf c den Zylinder K_c, dessen Mantellinien parallel der z-Achse sind, und projiziere auf ihn die Kurve C_1 durch Normalen des Zylinders K_c. Wir nennen die so erhaltene Kurve $\bar{C}$ kurz die „Normalprojektion" von C_1 auf K_c.

Abgesehen von Größen, welche bei unbegrenzter Annäherung der Kurven c und c_1 vernachlässigt werden dürfen, ist nun nach Gleichung (8)

$$w_{\bar{C}} - w_C = \int\limits_{(c)} (f'_{z'_u} dv - f'_{z'_v} du) \frac{\partial z}{\partial n} dn + \iint\limits_{(c)} \left(f'_z - \frac{d}{du}(f'_{z'_u}) - \frac{d}{dv}(f'_{z'_v})\right) du\, dv\, \bar{\delta} z \tag{12}$$

$$[\bar{\delta} z = z|[u, v, \bar{C}]| - z|[u, v, C]|].$$

Das Linienintegral auf der rechten Seite läßt sich, wenn mit ds das Bogenelement der Randkurve c bezeichnet wird, so umformen:

$$\int\limits_{(c)} (f'_{z'_u} \cos(v, s) - f'_{z'_v} \cos(u, s)) \frac{\partial z}{\partial n} dn\, ds \tag{13}$$

$$= \int\limits_{(c)} (f'_{z'_u} \cos(u, n) + f'_{z'_v} \cos(v, n)) \frac{\partial z}{\partial n} dn\, ds = \int\limits_{(c)} \left(f'_{z'_u} \frac{\partial z}{\partial u} + f'_{z'_v} \frac{\partial z}{\partial v}\right) dn\, ds.$$

Es stellt sich demnach dar als ein zweifaches Integral über den

zwischen c und c_1 liegenden Streifen der xy-Ebene, welches wir, in Anlehnung an die Bezeichnungsweise (9), auch so schreiben dürfen:

$$(14)\qquad \iint\limits_{(c,\,c_1)} (f'_{z'_u} z'_u + f'_{z'_v} z'_v)\,du\,dv.$$

Durch Verbindung von (9) und (12) ergibt sich nun:

$$(15)\quad w_{C_1} - w_{\bar{C}} = \iint\limits_{(c,\,c_1)} (f - f'_{z'_u} z'_u - f'_{z'_v} z'_v)\,du\,dv - \iint\limits_{(c)} \Big(f'_z - \frac{d}{du}(f'_{z'_u}) - \frac{d}{dv}(f'_{z'_v})\Big)\,du\,dv\,\bar{\delta} z$$

$$[\bar{\delta} z = z\,|[u, v, \bar{C}]| - z\,|[u, v, C_1]|]$$

Hier sind, im Integranden des ersten Integrales, für z, z'_u und z'_v diejenigen Funktionen von u, v einzusetzen, welche sich in den Punkten des Randes C auf der Fläche $F\,|[C]|$ ergeben.

Es ist klar, daß wir unser Verfahren auch folgendermaßen hätten anordnen können:

Wir wären von den Punkten einer ganz beliebig gewählten geschlossenen Kurve $\bar{C}$ durch Fortschreiten längs den Normalen des Zylinders $K_{\bar{C}}$ zu den Punkten einer Kurve C_1 gelangt und hätten schließlich die durch C_1 bestimmte Fläche unserer Mannigfaltigkeit $(\mathfrak{M})$ mit dem Zylinder $K_{\bar{C}}$ zum Schnitt gebracht. Diese zuletzt erhaltene Schnittkurve wäre dann an die Stelle der Kurve C getreten, von welcher wir bei der früheren Anordnung ausgegangen sind; an unseren Schlüssen hätte sich nichts geändert.

Das Bisherige zusammenfassend, können wir sagen:

Die rechte Seite der Gleichung (8) liefert die Variation von w für den Fall, daß nur die z-Koordinaten der Randkurve variieren.

Die rechte Seite der Gleichung (15) liefert die Variation von w für den Fall, daß die Projektionen der Randpunkte sich auf Normalen zur Projektion der Randkurve in der xy-Ebene bewegen, während die z-Ordinaten unverändert bleiben.

4.

Zum Schlusse wollen wir die Werte w und w_2 unseres Integrales w für zwei beliebige benachbarte Kurven C und C_2 vergleichen.

Zu diesem Zwecke legen wir durch beide Kurven Zylinderflächen K_C und K_{C_2} parallel zur z-Achse und projizieren die Kurve C_2 normal auf den Zylinder K_C der Kurve C. Die Projektion heiße $\bar{C}$, der variable Abstand zweier auf derselben Mantellinie liegender Punkte von $\bar{C}$ und C werde mit $\bar{z} - z = \delta z$ bezeichnet; dann ist, nach (8):

$$(16)\quad w_{\bar{C}} - w_C = \int\limits_{(c)} (f'_{z'_u} dv - f'_{z'_v} du)\,\delta z + \iint\limits_{(c)} \Big(f'_z - \frac{d}{du}(f'_{z'_u}) - \frac{d}{dv}(f'_{z'_v})\Big)\,du\,dv\,\delta z$$

$$[\delta z = z\,|[u, v, \bar{C}]| - z\,|[u, v, C]|],$$

während nach (15):

$$w_{C_2} - w_{\bar{C}} = \iint\limits_{\langle c\, c_2 \rangle} (f - f'_{z'_u} z'_u - f'_{z'_v} z'_v)\, du\, dv + \iint\limits_{(c)} \left(f'_z - \frac{d}{du}(f'_{z'_u}) - \frac{d}{dv}(f'_{z'_v})\right) du\, dv\, \delta_2$$

$$[\delta_2 z = z\,|[u, v, C_2]| - z\,|[u, v, \bar{C}]|]$$

ist.

Das auf der rechten Seite von (16) an erster Stelle auftretende Linienintegral läßt sich auch als Flächenintegral über den von den Kurven C und $\bar{C}$ begrenzten Streifen des Zylinders K_C auffassen. Wenn wir es als solches schreiben, so haben wir das Vorzeichen des Differentials nach v im Integranden zu ändern, also:

$$\iint (-f'_{z'_v}\, du\, dz - f'_{z'_u}\, dv\, dz).$$

Der eben genannte Flächenstreifen auf dem Zylinder K_C und der in Gleichung (17) durch $\langle c\, c_2 \rangle$ angedeutete Streifen der xy-Ebene sind beide Projektionen des Streifens, welcher von den Verbindungsstrecken entsprechender[*]) Punkte der beiden Raumkurven C und C_2 gebildet wird. Daher liefert die Zusammenfassung der beiden ersten Bestandteile der rechten Seiten von (16) und (17) das Flächenintegral

$$(18) \qquad \iint\limits_{(C C_2)} \{(f - f'_{z'_u} z'_u - f'_{z'_v} z'_v)\, du\, dv - f'_{z'_u}\, dv\, dz - f'_{z'_v}\, dz\, du\},$$

welches über den vorhin gekennzeichneten Flächenstreifen zwischen C und C_2 zu erstrecken ist.

Dieses tritt, wenn wir die Gleichungen (16) und (17) addieren, um die der Differenz $w_{C_2} - w_C$ entsprechende Variation zu bilden, auf der rechten Seite als erster Bestandteil auf. Der zweite Bestandteil ist ein Integral über den endlichen zweifach ausgedehnten Bereich (c) — das Innere der Kurve c. Es wird uns im folgenden nicht weiter beschäftigen, denn wir wollen die Annahme machen:

Die Flächen $F\,|[C]|$ unserer Mannigfaltigkeit ($\mathfrak{M}$) *seien bestimmt durch die Bedingung, der partiellen Differentialgleichung*

$$(19) \qquad f'_z - \frac{d}{du}(f'_{z'_u}) - \frac{d}{dv}(f'_{z'_v}) = 0$$

im ganzen Inneren und auf der Begrenzung des Bereiches (c) *zu genügen.*

Wir nennen solche Flächen „*Extremalflächen*".

---

[*]) Die Zuordnung wird durch die Kurve $\bar{C}$ vermittelt, auf welche sowohl die Kurve C als auch die Kurve C_2 bezogen sind.

Hierdurch fallen in (16) und (17), folglich auch in der Summe dieser Gleichungen, die zweiten Summanden auf der rechten Seite fort, und die von uns gesuchte Variation des Integralwertes w erscheint in der Form des Streifenintegrales (18).

5.

Nun denken wir uns eine von einem Parameter abhängige Schar von Extremalflächen gegeben, derart, daß durch einen Punkt u, v, z eines gewissen Raumgebietes eine einzige Fläche hindurchgeht; die zu dieser Fläche und zu diesem Punkte gehörenden Werte der Ableitungen $z'_u = \frac{\partial z}{\partial u}$ und $z'_v = \frac{\partial z}{\partial v}$ sollen mit p und q bezeichnet und „*Gefällfunktionen*" des von der Extremalflächenschar gebildeten „*Feldes*" genannt werden.

$$(20) \qquad (z'_u) = p(u, v, z); \qquad (z'_v) = q(u, v, z).$$

Eine, im übrigen beliebige, Fläche G werde von den Extremalflächen des Feldes in einer Schar von geschlossenen Kurven geschnitten, welche untereinander keine Punkte gemein haben, so daß jeder, zwischen zwei Extremalflächen F_1 und F_2 liegende Teil der Fläche G durch andere Extremalflächen in infinitesimale Streifen zerlegt werden kann.

Bilden wir nun für die einzelnen Streifen das Flächenintegral (18), indem wir für z'_u und z'_v die vorhin definierten Gefällfunktionen p und q einsetzen, und summieren über alle Streifen, so erhalten wir ein Oberflächenintegral, zu erstrecken über das zwischen F_1 und F_2 liegende Stück der Fläche G:

$$(21) \qquad \iint \{(f - pf'_p - qf'_q)\, du\, dv - f'_p\, dv\, dz - f'_q\, dz\, du\}.$$

Da das einzelne Streifenintegral (18) in erster Annäherung die Differenz der zwei von den begrenzenden Extremalflächen gelieferten Werte des Integrals w darstellt, so heben sich bei der Summierung alle Zwischenwerte fort, und es bleibt nur die Differenz der über F_1 und F_2 erstreckten Integrale w übrig.

Schrumpft die von F_1 auf G ausgeschnittene Kurve auf einen Punkt zusammen, so ist das Integral (21) über das ganze Innere der von F_2 auf G ausgeschnittenen Kurve L_2 zu erstrecken. Sein Wert muß übereinstimmen mit dem Werte unseres Integrales w, wenn in dessen Integranden für z die Funktion

$$(22) \qquad z = z\,|[u, v, L_2]| \qquad [\text{vergleiche } (5)]$$

gesetzt, und als Rand für den Bereich der Integration die Projektion der Kurve L_2 auf die xy-Ebene gewählt wird.

Da dieser letztere Wert nur von der Randkurve L_1 abhängt, so muß dasselbe von dem Oberflächenintegral (21) gelten; dieses muß also von der Natur der Fläche G unabhängig sein.

Nun ist bekannt, daß ein in der Form

$$(23) \quad \iint \{Z(u, v, z)\, du\, dv + U(u, v, z)\, dv\, dz + V(u, v, z)\, dz\, du\}$$

geschriebenes Oberflächenintegral jenen Charakter der Unabhängigkeit von der Fläche dann und nur dann besitzt, wenn die Bedingung

$$(24) \qquad \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

in allen Punkten des Bereiches der Integration erfüllt ist. Es muß also in unserem Falle

$$(25) \qquad \frac{\partial}{\partial z}(f - pf'_p - qf'_q) - \frac{\partial}{\partial u}(f'_p) - \frac{\partial}{\partial v}(f'_q) = 0$$

sein.

In der Tat erkennt man leicht, daß diese Gleichung erfüllt ist, wenn p und q die Gefällfunktionen des durch die partielle Differentialgleichung (19) bestimmten Feldes bezeichnen.

Setzt man in (2)

$$f = \sqrt{1 + z_u'^2 + z_v'^2},$$

so sind die Flächen, welche wir oben „Extremalflächen" genannt haben, Minimalflächen. Das Oberflächenintegral (21) hat in diesem Falle eine einfache geometrische Bedeutung, welche in der nachstehenden Mitteilung „Über eine Eigenschaft der Minimalflächen" erklärt wird.

(Eingegangen am 25. 9. 1920.)

Über eine Eigenschaft der Minimalflächen.

Von

K. Boehm in Karlsruhe i. B.

Untersuchungen über den Unabhängigkeitssatz für Integrale in mehrdimensionalen Bereichen, von welchen ich in diesem Hefte einiges mitteilen durfte, haben mich eine Eigenschaft der Minimalflächen auffinden lassen, welche den Geometern bisher entgangen zu sein scheint. Sie bildet eine merkwürdige Verallgemeinerung gewisser fundamentaler Sätze über die Projektion von Flächenstücken und geschlossenen Oberflächen auf Ebenen.

Ich löse die Ergebnisse hier aus den Gedankengängen heraus, welche mich zu ihnen geführt haben, und gestalte auch den Beweis so, daß er ohne die Kenntnis jener Untersuchungen verständlich wird.

Zuerst muß ich erklären, was unter dem Ausdrucke *„ein Stück einer krummen Oberfläche Element für Element auf eine andere Fläche projizieren“* verstanden werden soll, wobei ich, der Klarheit zu Liebe, nicht umhin kann, einiges allzu Elementare an den Anfang zu stellen.

Durch zwei einwertige reelle Funktionen

$$(1) \qquad z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y),$$

für welche wir das Vorhandensein stetiger Abgeleiteter von der ersten und der zweiten Ordnung zur Voraussetzung machen, seien zwei Flächen F_1 und F_2 definiert. Ordnen wir die Punkte, welche sich in denselben Punkt der xy-Ebene projizieren, einander zu, so sind die beiden Flächen oder zwei irgendwie begrenzte Stücke J_1 und J_2 beider Flächen in umkehrbar eindeutiger Weise aufeinander bezogen. Die Randpunkte eines begrenzten Stückes der einen Fläche sind den Randpunkten des entsprechenden Stückes der anderen Fläche zugeordnet.

Durch eine endliche Anzahl von Parallelen zur x-Achse und eine endliche Anzahl von Parallelen zur y-Achse werde in der xy-Ebene die ge-

meinsame Projektion der beiden Flächenstücke in Rechtecke und in (durch den Rand) krummlinig beschnittene Stücke von solchen eingeteilt.

Die vier auf der xy-Ebene senkrechten Ebenen

$$(2) \qquad x = x_0, \quad x = x_0 + dx_0, \quad y = y_0, \quad y = y_0 + dy_0,$$

wobei x_0, y_0, dx_0, dy_0 gegebene Konstanten bezeichnen, schneiden aus jeder der Flächen ein krummlinig begrenztes Viereck, aus ihrer Tangentialebene ein Parallelogramm heraus. Dieses kann, in Analogie zu dem Begriff „Bogendifferential", als das zu dem Rechteck (2) gehörige *„Oberflächendifferential"* bezeichnet werden. Man beachte, daß der Begriff „Differential" hier, wie überall, wo er in sauberer Weise eingeführt wird, in keiner Weise mit sogenannten „unendlich kleinen" Größen etwas zu tun hat.

Wie die Punkte, so entsprechen sich nun die aus den Flächen ausgeschnittenen Vierecke und die aus den Tangentialebenen ausgeschnittenen „Oberflächendifferentiale" unserer beiden Flächen F_1 und F_2.

Das Oberflächendifferential einer Fläche $z_\alpha = z_\alpha(x, y)$; $[\alpha = 1, 2]$ ist, seiner Stellung und seinem Flächeninhalte dF_α nach, gekennzeichnet durch das äußere Produkt der beiden Vektoren

$$(3) \qquad \mathfrak{U}_\alpha = (\mathfrak{e}_1 + p_\alpha \mathfrak{e}_3)\,dx_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_\alpha = (\mathfrak{e}_2 + q_\alpha \mathfrak{e}_3)\,dy_0,$$

wobei $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ Vektoren von der Länge 1 in der Richtung der Achsen bedeuten, d. h. durch den Vektor

$$(4) \qquad \mathfrak{U}_\alpha \frown \mathfrak{B}_\alpha = (-p_\alpha \mathfrak{e}_1 - q_\alpha \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3)\,dx_0\,dy_0,$$

worin

$$(5) \qquad p_\alpha = \left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial x}\right)_{x=x_0,\,y=y_0}; \quad q_\alpha = \left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial y}\right)_{x=x_0,\,y=y_0}$$

gesetzt ist.

Wir projizieren nun jedes Oberflächendifferential der Fläche F_1 auf die Ebene des entsprechenden Oberflächendifferentials der Fläche F_2 und bilden die Summe dieser Projektionen für sämtliche Rechtecke der xy-Ebene, welche mit allen ihren Punkten in das Innere des von der Randkurve begrenzten Bereiches hineinfallen. Alsdann verfeinern wir die Maschen des zugrunde gelegten Gitters in der xy-Ebene, indem wir die Seitenlängen der Rechtecke nach irgendeinem Gesetz unbegrenzt abnehmen lassen. Wenn bei diesem Prozeß die gebildete Summe der Projektionen gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, so soll dieser als die

„orthogonale Elementprojektion des Flächenstückes J_1 auf die Fläche F_2"

bezeichnet werden, oder wir sagen auch:

„Das Flächenstück J_1 wird Element für Element auf F_2 projiziert".

Analytisch drückt sich der soeben definierte Begriff aus durch ein Doppelintegral, welches sich in der Schreibweise der Vektoranalysis (ich benutze das von Burali-Forti und Marcolongo vorgeschlagene Zeichensystem) so wiedergeben läßt:

$$(6)\qquad P=\iint\frac{\mathfrak{U}_1\wedge\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{U}_2\wedge\mathfrak{B}_2}{|\mathfrak{U}_2\wedge\mathfrak{B}_2|}=\iint\frac{\mathfrak{U}_1\times\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2-\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\times\mathfrak{B}_2}{|\mathfrak{U}_2\wedge\mathfrak{B}_2|}$$

oder, in den Zeichen der Koordinatengeometrie

$$(6\text{a})\qquad P=\iint(1+p_2^2+q_2^2)^{-1/2}(1+p_1p_2+q_1q_2)\,dx\,dy.$$

Nach (4) sind $-p_1dxdy$ und $-q_1dxdy$ die Projektionen unseres Oberflächendifferentials dF_1 auf die yz-Ebene und auf die zx-Ebene. Demnach kann man dem Integral (6a) die Gestalt geben:

$$(7)\qquad P=\iint\frac{-p_2\,dy\,dz_1-q_2\,dz_1\,dx+dx\,dy}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}.$$

Wir fragen nun, wann dieses Integral, bei gegebener Funktion $z_2(x,y)$, von der Wahl der Funktion $z_1(x,y)$ unabhängig, also einzig durch die Randkurve bestimmt ist, und finden die Antwort in dem bekannten Kriterium

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-p_2}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-q_2}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\right)=0.$$

Da der dritte Summand gleich Null ist, so bleibt, als Bedingung für die Funktion z_2, die partielle Differentialgleichung übrig

$$9)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_2}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_2}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\right)=0,$$

welche fordert, daß die Fläche F_2 eine Minimalfläche sei.

Hat umgekehrt die Fläche F_2 diese Eigenschaft, so ist das Integral (7) tatsächlich nur eine Funktion des Randes.

Aus diesen Überlegungen folgen die Sätze:

„*Zwei durch dieselbe Randlinie begrenzte Stücke beliebiger krummer Flächen besitzen auf einer Minimalfläche die gleiche Elementprojektion.*"

„*Die Elementprojektion einer geschlossenen Fläche auf eine Minimalfläche ist stets gleich Null.*"

Einschränkungen können diese Sätze erleiden, wenn zwischen den beiden Flächen, von welchen im ersten, und im Innern der geschlossenen Fläche, von welcher im zweiten die Rede ist, Punkte vorhanden sind, für welche die linke Seite von (9) ihren guten Sinn verliert.

Projizieren wir ein Flächenstück, Element für Element, auf die durch seinen Rand gelegte Minimalfläche, so muß — wegen der Unabhängigkeit

des Integrales (7) von der Natur der Fläche F_1 — die Projektion dieselbe Größe haben, als wenn die Minimalfläche auf sich selbst projiziert würde:

$$\iint \frac{\mathfrak{U}_2 \frown \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{U}_2 \frown \mathfrak{B}_2}{|\mathfrak{U}_2 \frown \mathfrak{B}_2|} = \iint |\mathfrak{U}_2 \frown \mathfrak{B}_2| = \iint \sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}\, dx\, dy.$$

Das heißt:

„*Die orthogonale Elementprojektion eines durch eine vorgegebene Linie berandeten Stückes einer beliebigen Fläche auf die durch diesen Rand bestimmte Minimalfläche ist stets gleich dem Flächeninhalte des durch die Randlinie auf der Minimalfläche abgegrenzten Stückes.*“

Wenn der Rand durch eine ebene Kurve gebildet wird, so ist die Minimalfläche eine Ebene, und wir sehen uns auf bekannte Sätze zurückgeführt.

(Eingegangen am 25. 9. 1920.)

Adolf Hurwitz[1]).

Von

D. Hilbert in Göttingen.

Adolf Hurwitz wurde am 26. März 1859 in Hildesheim geboren Hier besuchte er das städtische Realgymnasium, an welchem damals der in Fachkreisen später bekannt gewordene Mathematiker Hannibal Schubert den mathematischen Unterricht erteilte. Schubert führte den jungen Hurwitz schon auf der Sekunda in den „Kalkül der abzählenden Geometrie" ein, eine damals neu emporkommende Disziplin, deren systematische Bearbeitung und Ausbildung Schubert sich zu seiner Lebensaufgabe gemacht hatte. Hurwitz wurde durch diesen persönlichen Verkehr mit Schubert sehr frühzeitig zu selbständigem Forschen angeregt und veröffentlichte bereits als 17jähriger Schüler mit seinem Lehrer zusammen in den Nachrichten unserer Gesellschaft eine Arbeit *Über den Chaslesschen Satz* $\alpha\mu + \beta\nu$.

Auf Schuberts Rat begann Hurwitz 1877 sein Studium bei Klein, der damals an der Technischen Hochschule in München lehrte. Hier lernte Hurwitz vor allem die Zahlentheorie kennen, die Klein gerade las. Von München ging Hurwitz auf drei Semester nach Berlin, wo er die strengen funktionentheoretischen Methoden von Weierstraß und nicht minder die eigenartigen arithmetischen Denkweisen von Kronecker in sich aufnahm und verarbeitete. Nach München zurückgekehrt trat er mit Klein, dem er 1880 nach Leipzig folgte, in regsten persönlichen Verkehr, und es entstanden so die bedeutenden Arbeiten von Hurwitz über elliptische Modulfunktionen, unter ihnen vor allem 1881 die Inauguraldissertation, in der er auf Anregung von Klein mit Benutzung Eisensteinscher Ansätze eine

[1]) Abgedruckt aus Göttinger Nachrichten, Geschäftliche Mitteilungen, 1920. Das von Rudio herausgegebene Verzeichnis der Veröffentlichungen ist abgedruckt aus Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 65 (1920).

von der Theorie der elliptischen Funktionen unabhängige Theorie der elliptischen Modulfunktion schuf. Ein Hauptteil dieser Dissertation handelt von den sogenannten Multiplikatorgleichungen, die Hurwitz im Anschluß an die Arbeiten von Klein und Kiepert mit der ihm eigenen Gründlichkeit und Sorgfalt studiert.

Der Leipziger Verkehr mit Klein (1881—1882) brachte Hurwitz insbesondere *einen* wissenschaftlichen Gewinn, der für seine gesamte Entwicklung von entscheidendem Einfluß gewesen und beständig in seinen Publikationen erkennbar ist, nämlich das Vertrautwerden mit den Riemannschen Ideen, die damals noch nicht wie heute Allgemeingut waren, und deren Kenntnis gewissermaßen die Versetzung in eine höhere Klasse von Mathematikern bedeutete. Und Hurwitz lernte in Leipzig nicht nur allgemein die Riemannschen Methoden, sondern auch deren so fruchtbare Anwendung auf die Theorie der automorphen Funktionen kennen, die Klein gerade mit höchstem Erfolge betrieb.

Da nach einem Beschlusse der Leipziger Fakultät die Habilitation eines Realgymnasialabiturienten unter keinen Umständen mehr zulässig sein sollte, so war für Hurwitz ebenso wie für den jungen Hölder, den gegenwärtigen Leipziger Ordinarius für Mathematik, die Habilitation in Leipzig bei Klein nicht möglich. Hurwitz habilitierte sich daher 1882, ebenso wie nachher Hölder, in Göttingen.

In diese Göttinger Zeit fällt die Veröffentlichung einer Reihe von interessanten Abhandlungen insbesondere aus dem Gebiete der Funktionentheorie, so der Beweis des Satzes, daß eine einwertige Funktion beliebig vieler Variabler, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. Dieser von Weierstraß ohne Beweis ausgesprochene Satz wird hier von Hurwitz in sehr eleganter Weise auf Grund der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums bewiesen.

Zwei Jahre später, noch nicht 25 Jahre alt, wurde Hurwitz auf Veranlassung von Lindemann, der seine außerordentlichen Fähigkeiten als Forscher wie als Lehrer erkannte, nach Königsberg berufen. Hier wurde ich, damals noch Student, bald von Hurwitz zu wissenschaftlichem Verkehr herangezogen und hatte das Glück, durch das Zusammensein mit ihm in der mühelosesten und interessantesten Art die Gedankenrichtungen der beiden damals sich gegenüberstehenden und doch einander sich so vortrefflich ergänzenden Schulen, der geometrischen Schule von Klein und der algebraisch-analytischen Berliner Schule kennenzulernen. Dieser Verkehr wurde um so anregender, als auch der geniale Hermann Minkowski, mit dem ich schon vorher befreundet war und der während der Universitätsferien regelmäßig bei seiner Familie in Königsberg weilte, zu unserm

Freundschaftsbund hinzutrat. Auf zahllosen, zeitenweise Tag für Tag unternommenen Spaziergängen haben wir damals während acht Jahren wohl alle Winkel mathematischen Wissens durchstöbert, und Hurwitz mit seinen ebenso ausgedehnten und vielseitigen wie festbegründeten und wohlgeordneten Kenntnissen war uns dabei immer der Führer.

Die Königsberger Jahre waren für Hurwitz eine Zeit intensivster Arbeit. Zunächst setzte er seine schon früher unter dem Einfluß von Klein begonnenen Untersuchungen über Klassenanzahlrelationen fort, wobei er merkwürdige Aufschlüsse über gewisse in diesen auftretende zahlentheoretische Funktionen induktiv gewinnt und dann allgemein als richtig nachweist. Auch der geometrische Interessenkreis, der durch seine früheren Arbeiten über Schließungsprobleme und Tangentenkonstruktionen charakterisiert ist, fesselt ihn noch, wie seine Bemerkungen über die Schrötersche Konstruktion der ebenen Kurve 3^{ter} Ordnung zeigen; aber seine Hauptkraft wendet er der Erforschung schwieriger algebraischer Fragen mittels funktionentheoretischer, insbesondere Riemannscher Methoden zu. Aus der Fülle der in rascher Folge erscheinenden Abhandlungen seien als die bedeutendsten und aus dieser Schaffensperiode tiefstgehenden die folgenden erwähnt:

Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip.

Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen.

Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten.

Zur Theorie der Abelschen Funktionen.

Die erste Abhandlung bringt eine Klärung der Frage nach der Anzahl der Koinzidenzen einer algebraischen Korrespondenz auf einer beliebigen Kurve. In der zweiten Abhandlung, die eine Fülle von neuen Ergebnissen enthält, wird unter anderem eine obere Grenze für die Anzahl der Transformationen einer algebraischen Kurve in sich und für ihre Ordnungen angegeben. Die letzte der genannten Arbeiten schafft fruchtbare Ansätze zur Übertragung der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen auf Funktionen, die sich auf einer Riemannschen Fläche multiplikativ verhalten.

Ein mit Vorliebe von Hurwitz behandeltes Thema war die Theorie der arithmetischen Kettenbrüche. In seiner Arbeit *Über die Entwicklung komplexer Größen in Kettenbrüche* ging er dabei über den bisher allein berücksichtigten Bereich der reellen Zahlen hinaus und stellte einen allgemeinen Satz über die Periodizität der Kettenbruchentwicklung relativ quadratischer Irrationalitäten auf, der auf die Kettenbruchentwicklungen

in den Körpern der dritten und der vierten Einheitswurzeln eine interessante Anwendung findet.

Die sehr merkwürdigen Resultate über spezielle Kettenbrüche, nämlich über die Kettenbruchentwicklungen der Zahl e und über die Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden, sind ebenfalls hier zu erwähnen, obwohl die Veröffentlichung der letzten Arbeiten in eine spätere Zeit fällt.

Auch entstehen in der Königsberger Zeit die Abhandlungen *Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen*.

Schließlich beginnt in der Königsberger Zeit die Veröffentlichung einer Reihe von Abhandlungen, wie *Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen* und *Über die Wurzeln einiger transzendenten Gleichungen*, in denen er verschiedene funktionentheoretische Hilfsmittel zur Trennung der Wurzeln transzendenter Gleichungen heranzieht und dabei zu Ergebnissen gelangt, die auch für den praktischen Gebrauch dieser Funktionen von Bedeutung sind.

Michaelis 1892 folgte Hurwitz einem Rufe als ordentlicher Professor an das Eidgenössische Polytechnikum in Zürich, wo er 27 Jahre hindurch bis zu seinem Tode wirkte. Während dieser Zeit in Zürich, die an Produktivität der Königsberger nicht nachsteht, hat Hurwitz den Bereich seiner schöpferischen Tätigkeit beständig erweitert, so daß diese schließlich alle Teile der reinen Mathematik betraf.

Unter den Abhandlungen über neu hinzukommende Gegenstände seien hier folgende hervorgehoben:

Zur Invariantentheorie, eine Arbeit, in der Hurwitz unter anderem eine Verallgemeinerung des bekannten Hermiteschen Reziprozitätsgesetzes der binären Invariantentheorie auf Formen von beliebig vielen Variabeln findet.

Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, eine Arbeit, in der Hurwitz ein neues Erzeugungsprinzip für algebraische Invarianten entdeckt, das ihm insbesondere ermöglicht, ein von mir eingeschlagenes Verfahren zum Nachweis der Endlichkeit des vollen Invariantensystems auf den Fall orthogonaler Invarianten anzuwenden.

Über die Theorie der Ideale.

Über einen Fundamentalsatz der arithmetischen Theorie der algebraischen Größen.

Zur Theorie der algebraischen Zahlen.

Der Euklidische Divisionssatz in einem endlichen algebraischen Zahlkörper.

Diese Arbeiten enthalten zwei neue Beweise des Fundamentalsatzes der Idealtheorie über die eindeutige Zerlegbarkeit der Ideale in Primideale.

Der erste schließt an die Gedankengänge von Kronecker über die Verwendung von Unbestimmten an; der zweite Beweis, den Hurwitz in der letzten Arbeit noch ausführt und sehr vereinfacht, ist bemerkenswert durch die Analogie mit dem Euklidischen Algorithmus in der elementaren Zahlentheorie.

Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper. In dieser Arbeit handelt es sich um die Gruppe aller derjenigen linearen binären Substitutionen, deren Koeffizienten ganze Zahlen eines gegebenen algebraischen Zahlkörpers von der Determinante 1 sind. Das Hauptergebnis ist in dem Satze enthalten, daß diese Gruppe stets eine endliche Anzahl von erzeugenden Substitutionen besitzt.

Über lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln, eine Arbeit, die einen direkten und klassisch gewordenen Beweis des berühmten Minkowskischen Satzes über Linearformen bringt.

Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Dieses Problem aus der Theorie der kleinen Schwingungen ist auch für die technischen Anwendungen von höchster Bedeutung. Für die Entscheidung ergibt sich als notwendig und hinreichend, daß gewisse in Determinantenform aus den Koeffizienten der Gleichung gebildete Zahlen positiv ausfallen.

Über die Zahlentheorie der Quaternionen.

Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. (Berlin, Julius Springer, 1919.) Der wesentliche Gedanke besteht in der Erkenntnis, daß die ganzzahligen Quaternionen zu einem Bereich erweitert werden können, der analoge Eigenschaften besitzt, wie die Gesamtheit der ganzen algebraischen Zahlen eines Körpers. Dadurch wird die Theorie schöner Anwendungen auf alte klassische Probleme der Zahlentheorie fähig.

Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen. Diese Arbeit behandelt die Eigenschaften der Entwicklungskoeffizienten der Weierstraßschen $\wp$-Funktion im lemniskatischen Falle, die den gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen entsprechen, und das Hilfsmittel ist die komplexe Multiplikation der lemniskatischen Funktion. Die Eleganz, mit der die großen Schwierigkeiten des Problems überwunden werden, ist bewunderungswürdig.

Sur un théorème de M. Hadamard. Die kurze Arbeit enthält ein Seitenstück zu einem bekannten Hadamardschen Satze, indem sie ein Verfahren angibt, aus zwei gegebenen Potenzreihen eine neue zu bilden, deren singuläre Stellen sich aus den singulären Stellen der beiden gegebenen additiv zusammensetzen. Die Arbeit ist noch besonders dadurch bemerkenswert, daß Hurwitz darin die Poincarésche Theorie der Residuen der Doppelintegrale in neuer Weise anwendet.

Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Hurwitz beweist hier unter prinzipieller Anwendung der Fourier-Koeffizienten auf elegante Art die klassischen Minimaleigenschaften des Kreises.

Über eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen. In dieser Arbeit, die im Dirichlet-Bande des Crelleschen Journals erschienen ist, gibt Hurwitz eine sehr merkwürdige, auf vollständig neuen Prinzipien beruhende Darstellung für die Klassenanzahl binärer quadratischer Formen negativer Diskriminante durch unendliche Reihen.

Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls. Durch Einführung des Begriffs der Trägheitsform gelingt es Hurwitz unter anderem, neue Beweise der Mertensschen Sätze über die Resultante von n Formen mit n homogenen Variabeln zu gewinnen und über sie hinaus zu gehen. Insbesondere ergibt sich eine neue, sehr elegante Darstellung der Resultante als größter gemeinsamer Teiler von gewissen n Determinanten.

Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. Auf dem Züricher internationalen Kongreß gab Hurwitz ein Bild von dem damaligen Stande der Theorie der analytischen Funktionen: es ist ein Vortrag, mustergültig durch die klare und prägnante Ausdrucksweise, sowie die glückliche Umgrenzung und Auswahl des so weit ausgedehnten Stoffes.

Hurwitz hat seit seiner Habilitation 1882 in ununterbrochener Regelmäßigkeit von allem, was ihn wissenschaftlich beschäftigte, Aufzeichnungen gemacht und auf diese Weise eine Serie von 31 Tagebüchern hinterlassen, die ein getreues Bild seiner beständig fortschreitenden Entwicklung geben und zugleich eine reiche Fundgrube für interessante uud zur weiteren Bearbeitung geeignete Gedanken und Probleme sind.

Aber Hurwitz war nicht bloß Forscher, er gehörte vielmehr zu den hervorragendsten und erfolgreichsten mathematischen Universitätsdozenten unserer Zeit. Insbesondere nach der Wegberufung Minkowskis von Zürich widmete er sich der ihm am eidgenössischen Polytechnikum übertragenen Aufgabe der Ausbildung der mathematischen Oherlehrer mit hingebender Liebe und Pflichttreue. Seine Vorlesungen waren durch die sorgfältige Auswahl des Stoffes, die abgerundete Ausdrucksform und die ruhige, klare Sprache ausgezeichnet. In den Übungen war er beständig darauf bedacht, durch anregende Aufgaben zur Mitarbeit heranzuziehen, und es war charakteristisch, wie oft man ihn in seinen Gedanken auf der Suche nach geeigneten Aufgaben und Problemstellungen für seine Schüler antraf. Von welchem Erfolge seine Mühe war, davon legen die zahlreichen schönen Dissertationen, die unter seiner Leitung entstanden sind, Zeugnis ab.

Von seinen Publikationen gilt das gleiche, wie von seinen Vorlesungen, sie sind in Form und Stil ein Spiegelbild seiner Persönlichkeit. Einige darunter, z. B. das kleine schon vorhin erwähnte Buch über die Zahlentheorie der Quaternionen, sind Meisterstücke der Darstellungskunst. Er war besonders eingenommen gegen alle Art von Aufmachung und unechtem Beirat bei der Publikation: eine mathematische Arbeit sollte nirgends über den Bereich der wirklichen Leistung und erkannten Wahrheit hinaus mehr erscheinen wollen, und er konnte, wie mild sonst sein wissenschaftliches Urteil war, dann wohl ein scharfes Wort brauchen, wenn er die Verschleierung einer Lücke im Gedankengang irgendwo zu rügen fand.

Unter seinen Betätigungen außerhalb des Berufes stand obenan die Musik, die ihm eine notwendige Ergänzung zur Wissenschaft war. Er betrieb von Jugend an das Klavierspiel und vervollkommnete sich darin beständig. Musikalische Darbietungen bereiteten ihm zugleich Erhebung und Genuß, und namentlich in der späteren Züricher Zeit wurde sein Haus mehr und mehr eine Pflegestätte der Musik.

Hurwitz war ein harmonisch entwickelter und philosophisch abgeklärter Geist, gern bereit zur Anerkennung der Leistungen anderer und von aufrichtiger Freude erfüllt über jeden wissenschaftlichen Fortschritt an sich: ein Idealist im guten altmodischen Sinne des Wortes. Er war eine vornehme Natur: angesichts der heute so verbreiteten Unsitte, die eigene Berufung zu betreiben, schätzen wir in Hurwitz ganz besonders den Mann, der so tief innerlich bescheiden und zugleich so frei von allem äußeren Ehrgeiz war, daß er keine Kränkung darüber empfand, wenn ein Mathematiker, der ihm an Bedeutung nachstand, ihm bei Berufungen vorgezogen wurde. Übrigens fühlte er sich in der schönen Natur der Schweiz und ihren freiheitlichen Einrichtungen äußerst wohl, und durch das Entgegenkommen von seiten der eidgenössischen Schulbehörde war seine amtliche Tätigkeit genau seinen Wünschen gemäß gestaltet. Es ist ihm schließlich zum Glück ausgeschlagen, daß er in der Schweiz blieb, da er den körperlichen und seelischen Anstrengungen, die das Leben in Deutschland während des Krieges für ihn mit sich gebracht hätte, nicht gewachsen gewesen wäre.

Hurwitz war von unscheinbarem Äußeren; aber das kluge und lebhafte Auge verriet seinen Geist. Sein freundliches und offenes Wesen gewann ihm, als er nach Königsberg kam, rasch die Herzen aller, die ihn dort kennen lernten, und wie sehr man ihn in Zürich schätzte, bezeugen allein die zahlreichen warmen Nachrufe, die ihm aus schweizerischen Kreisen zuteil geworden sind.

Seine frühzeitigen Erfolge hatten ihn nicht überhebend gemacht, vielmehr blieb er seiner bescheidenen Natur treu und mied jedes persönliche Hervortreten im akademischen und öffentlichen Leben.

In Zürich war er ein Mittelpunkt für den Kreis der jüngeren Mathematiker, und während der letzten Dezennien hat gewiß kein Mathematiker des In- und Auslandes Zürich passiert, ohne ihn, der selbst wenig reiste, zu besuchen.

Auch äußere Anerkennungen sind ihm zuteil geworden: die mathematischen Gesellschaften zu Hamburg, Charkow und London ernannten ihn zu ihrem Ehrenmitglied; auch war er auswärtiges Mitglied der Accademia dei Lincei zu Rom. Unserer Gesellschaft gehörte er seit 1892 als korrespondierendes und seit 1914 als auswärtiges Mitglied an.

Hurwitz war seit seiner Jugend von zarter Gesundheit: zweimal, in den Jahren 1877 und 1886, wurde er von schwerem Typhus heimgesucht. Heftige Migräne zwang ihn bereits auf der Universität, öfters seine Studien zu unterbrechen. Am besten ging es ihm gesundheitlich in den ersten Jahren in Zürich. Die damals berechtigte Hoffnung seiner Freunde, daß seine Beschwerden nur nervöser Natur seien, erfüllten sich nicht. Im Juli 1905 mußte zu einer Operation geschritten werden: es wurde ihm die eine Niere entfernt, und als später auch die zweite Niere erkrankte, war äußerste Vorsicht und Schonung geboten. Während dieser schweren Jahre stand ihm seine Frau, die Tochter des Königsberger Professors der Medizin Samuel, in aufopferndster Treue zur Seite: ihrer keinen Augenblick ruhenden Sorge und aufs genaueste bedachten Pflege gelang es, vorübergehende Besserungen in seinem Befinden zu erzielen, und es wurde ihm dadurch möglich, bis zuletzt seine Berufspflichten zu erfüllen. Hurwitz selbst ertrug sein Schicksal mit der überlegenen Ruhe des Philosophen. Der Wunsch, von den Seinen nicht Abschied nehmen zu müssen, ist ihm erfüllt worden: er erwachte in den Tagen vor seinem Tode nicht mehr zum Bewußtsein.

Es war ein ganz der stillen Denkerarbeit gewidmetes, sich selbst stets treues Gelehrtenleben, das am 18. November 1919 allzufrüh zu Ende ging — in dankbarem und treuem Andenken bewahrt auch außerhalb des Verwandten- und Freundeskreises überall in der mathematischen Gelehrtenwelt.

Verzeichnis der Veröffentlichungen von Adolf Hurwitz[1]).

1. Über den Chaslesschen Satz $\alpha\mu+\beta\nu$. (Zusammen mit H. Schubert.) Götting. Nachr. 1876.
2. Über unendlich vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schließungsprobleme. Math. Annalen 15.
3. Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen 1. Stufe. (Inaugural-Dissertation, Leipzig 1881.) Math. Annalen 18.
4. Zur Transformationstheorie der elliptischen Funktionen. Math. Annalen 19.
5. Über die Anwendung der elliptischen Funktionen auf Probleme der Geometrie. Math. Annalen 19.
6. Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s)=\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 27.
7. Über eine Reihe neuer Funktionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden. Math. Annalen 20.
8. Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumkurven 3. Ordnung. Math. Annalen 20.
9. Über die Perioden solcher eindeutiger $2n$-fach periodischer Funktionen, welche im Endlichen überall den Charakter rationaler Funktionen besitzen und reell sind für reelle Werte ihrer n Argumente. Journal f. Math. 94.
10. Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen. Math. Annalen 22.
11. Über Tangentenkonstruktionen. Math. Annalen 22.
12. Zur Theorie der Modulargleichungen. Götting. Nachr. 1883.
13. Beweis des Satzes, daß eine einwertige Funktion beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. Journal f. Math. 95.
14. Über Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Berichte d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1884.
15. Sur le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés. (Lettre adressée à M. Hermite.) Comptes rendus 98 (1884).
16. Über Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Math. Annalen 25.
17. Einige allgemeine Sätze über Raumkurven. Math. Annalen 25. Mit einem Zusatze in 27.
18. Über die Klassenzahlrelationen und Modularkorrespondenzen primzahliger Stufe. Berichte d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1885.
19. Über einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen. Math. Ann. 26.
20. Über die Anzahl der Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. Journal f. Math. 99.

[1]) Hurwitz hat über seine Veröffentlichungen stets genau Buch geführt, und so stammt auch das vorliegende Verzeichnis ganz von seiner Hand. Mein Anteil daran beschränkt sich daher, von redaktionellen Änderungen abgesehen, im wesentlichen auf das Lesen der Korrektur. F. Rudio.

21. Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip. Berichte d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1886. Wieder abgedruckt Math. Annalen **28**.
22. Über endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transzendenten auftreten. Math. Annalen **27**.
23. Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Götting. Nachr. 1887.
24. Über eine besondere Raumkurve 3. Ordnung. Math. Annalen **30**.
25. Über die Entwicklung komplexer Größen in Kettenbrüche. Acta Math. **11**.
26. Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen. Math. Annalen **32**.
27. Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Math. Annalen **33**.
28. Über die Differentialgleichungen dritter Ordnung, welchen die Formen mit linearen Transformationen in sich genügen. Math. Annalen **33**.
29. Über eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Größen. Acta Math. **12**.
30. Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique. Annales de l'Ecole Norm. **6**.
31. Über die Wurzeln einiger transzendenter Gleichungen. Festschrift d. Math. Ges. in Hamburg 1890.
32. Über einige Verallgemeinerungen der Leibnizschen Differentiationsformel und des polynomischen Lehrsatzes. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **35**.
33. Über die Schrötersche Konstruktion der ebenen Kurven 3. Ordnung. Journal f. Math. **107**.
34. Über beständig konvergierende Potenzreihen mit rationalen Zahlenkoeffizienten und vorgeschriebenen Nullstellen. Acta Math. **14**.
35. Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null. Acta Math. **14**. (Zusammen mit D. Hilbert.)
36. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Götting. Nachr. 1890. Math. Annalen **38**.
37. Über den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels. Journal f. Math. **108**.
38. Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. Math. Annalen **39**.
39. Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Annalen **39**.
40. Über die Kettenbruch-Entwicklung der Zahl *e*. Phys.-ökonom. Ges. zu Königsberg 1891.
41. Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Götting. Nachr. 1892.
42. Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Annalen **41**.
43. Beweis der Transzendenz der Zahl *e*. Götting. Nachr. 1893.
44. Über Riemanns Konvergenzkriterium. Math. Annalen **44**.
45. Über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche. Math. Annalen **44**.
46. Über die Reduktion der binären quadratischen Formen. Math. Annalen **45**.
47. Zur Invariantentheorie. Math. Annalen **45**.
48. Über die Theorie der Ideale. Götting. Nachr. 1894.
49. Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Math. Annalen **46**.

50. Über einen Fundamentalsatz der arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Götting. Nachr. 1895.
51. Über die Anzahl der Klassen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Acta Math. 19.
52. Zur Theorie der algebraischen Zahlen. Götting. Nachr. 1895.
53. Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper. Götting. Nachr. 1895.
54. Über die Reduktion der binären quadratischen Formen. Kongreß zu Chicago 1896.
55. Über die Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden. Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. in Zürich 41 (Jubelband 1896).
56. Über die Zahlentheorie der Quaternionen. Götting. Nachr. 1896.
57. Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration. Götting. Nachr. 1897.
58. Über lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln. Götting. Nachr. 1897.
59. Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen. Götting. Nachr. 1897.
60. Sur l'intégrale finie d'une fonction entière. Acta Math. 20. Mit Zusatz in 22.
61. Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. Verhandl. d. 1. intern. Math.-Kongr. in Zürich 1897 (Leipzig 1898).
62. Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen. Math. Annalen 51.
63. Über die Komposition der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln. Götting. Nachr. 1898.
64. Sur un théorème de M. Hadamard. Comptes rendus 128 (1899).
65. Über die Anwendung eines funktionentheoretischen Prinzipes auf gewisse bestimmte Integrale. Math. Annalen 53.
66. Sur le problème des isopérimètres. Comptes rendus 132 (1901).
67. Über die Anzahl der Riemannschen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. Math. Annalen 55
68. Sur les séries de Fourier. Comptes rendus 132 (1901).
69. Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Annales de l'Ecole Norm. 19.
70. Über Abels Verallgemeinerung der binomischen Formel. Acta Math. 26 (Abelband).
71. Über höhere Kongruenzen. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 5.
72. Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. Math. Annalen 57. Mit Zusatz in Bd. 59.
73. Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Annalen 58.
74. Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie. Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. in Zürich 49.
75. Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln. Math. Annalen 61.
76. Über eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen. Journal f. Math. 129.
77. Über die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Funktion. Götting. Nachr. 1906.
78. Sur les points critiques des fonctions inverses. Comptes rendus 143 (1906).
79. Sur les points critiques des fonctions inverses. (2^{me} note.) Comptes rendus 144 (1907).
80. Über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 11.

81. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion. Math. Annalen **64**.
82. Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n-ten Potenzen ganzer Zahlen. Math. Annalen **65**.
83. Über die diophantische Gleichung $x^3y+y^3z+z^3x=0$. Math. Annalen **65**.
84. Über die Kongruenz $ax^e+by^e+cz^e\equiv 0 \pmod{p}$. Journal f. Math. **136**. Kleinere Beiträge im Interméd. des Math.: **2**, S. 295, 367/8, 383/4; **3**, S. 214; **7**, S. 21; **8**, S. 128, 136, 169, 179; **14**, S. 107.
85. Über die Einführung der elementaren transzendenten Funktionen in der algebraischen Analysis. Math. Annalen **70**.
86. Über den Satz von Budan-Fourier. Math. Annalen **71**.
87. Über definite Polynome. Math. Annalen **73**.
88. Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls. Annali di Mat. (3) **20**.
89. Über einen Satz des Herrn Kakeja. Tôhoku Math. Journal **4**.
90. Über die Weierstraßsche σ-Funktion. Aus der Festschr. f. H. A. Schwarz, Berlin 1914.
91. Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. Acta Math. **30**.
92. Über ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades. Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. in Zürich **62**.
93. Zu Graßmanns Note: „Lösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3+u^3=0$ in ganzen Zahlen". Jahresber. d. Dtsch. Math. Verein. **27**.
94. Der Euklidische Divisionssatz in einem endlichen algebraischen Zahlkörper. Math. Zeitschr. **3**.
95. Über die algebraische Darstellung der Normgebilde. Math. Annalen **79**.

In Buchform erschien:

96. Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Berlin, Springer 1919, 74 S.

(Eingegangen am 15. 1. 1921.)

Zur Axiomatik der Mengenlehre[1]).

Von

A. Schoenflies in Frankfurt a. M.

Die Hilbertsche Grundlegung der Geometrie darf für alle analogen Untersuchungen als vorbildlich gelten. Zwei ihrer Eigenschaften sind es, auf die es hier ankommt. Erstens wird von allen sprachlichen Definitionen der Objekte, mit denen sie operiert, wie Punkt, Gerade, zwischen usw. abgesehen; nur ihre gegenseitigen Beziehungen und deren Grundgesetze werden axiomatisch an die Spitze gestellt[2]). Zweitens werden die Axiome in verschiedene Gruppen gewisser Eigenart und Tragweite gespalten (die des Schneidens und Verbindens, die Axiome der Ordnung, der Kongruenz usw.), und es ist eine wesentliche Aufgabe des axiomatischen Aufbaues, zu prüfen, bis zu welchen Resultaten eine einzelne oder mehrere dieser Gruppen für sich führen. Die gleiche Behandlung eignet sich für die Mengenlehre. Von sprachlicher Einführung der Begriffe Menge, Bereich usw. ist daher ebenso abzusehen, wie von der des Punktes oder Raumes. Ebenso kann man hier gewisse Axiomgruppen unterscheiden, die Axiome der Äquivalenz, die Axiome der Ordnung usw., und kann die gleichen Fragen stellen, wie im Gebiet der Geometrie. Dies soll im folgenden geschehen, und zwar für denjenigen Teil, der nur mit der Äquivalenz der Mengen, der Mengenteilung und Mengenverbindung, sowie der Mengenvergleichung operiert.

---

[1]) Mit Zusatz abgedruckt aus Amsterdam Ac. Proceedings 22 (1920).

[2]) Der Euklidische Aufbau beginnt noch mit den Worten: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite usw. In dem Verzicht auf alle solchen sprachlichen Begriffsbestimmungen liegt einer der wesentlichen durch Hilbert besonders modern gewordenen Gedanken. Übrigens hatte schon Pasch durch seine Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig, 1882) in dieser Richtung vorbildlich gewirkt. Die Mengenlehre hat sich diesem Gedanken bisher nicht erschlossen.

Will man die Probleme der Mengenlehre einer derartigen Behandlung unterwerfen, so ist es oberstes Erfordernis, die Begriffe der endlichen und der unendlichen Menge auf einer Grundlage einzuführen, die nur die ebengenannten Fundamentalbegriffe benutzt. Solche Definitionen sind ja in der Dedekindschen Begriffsbestimmung vorhanden: Eine Menge M heißt unendlich, wenn es eine (echte) Teilmenge M' von M gibt, die äquivalent M ist; sie heißt endlich, wenn es eine solche Teilmenge nicht gibt. *Sie* haben daher den *alleinigen Ausgangspunkt* zu bilden.

Die historische Entwicklung der Mengenlehre ist freilich wesentlich anders vor sich gegangen. Während vorstehend die *unendliche* Menge als das logisch *positiv* bestimmte Objekt erscheint, und die *endliche* Menge als ihr logisches *Gegenteil*, ist die historische Entwicklung umgekehrt von den endlichen Mengen als wohlbekannten mathematischen Objekten ausgegangen, und hat die unendlichen Mengen als Gegensatz der endlichen Mengen eingeführt. Der so benutzte Begriff der endlichen Menge gehört aber bereits einem Gebiet an, das sich nicht mehr ausschließlich an die Äquivalenzbeziehungen anschließt. Der historisch überkommene Begriff der endlichen Menge ruht ja überhaupt nicht auf axiomatischer Grundlage. Mag man ihn sprachlich oder empirisch oder anschaulich auffassen, er war im wesentlichen an der Hand des Zahlbegriffs entstanden und ruht jedenfalls auf Voraussetzungen, in die auch die Ordnung als Grundbegriff eingeht. Diese gehört aber bereits einer Begriffsgruppe an, von der hier abzusehen ist. So laufen in der historischen Entwicklung der Mengenlehre zwei wesentlich verschiedene Bestimmungen der endlichen und unendlichen Mengen unvermittelt nebeneinander her und erschweren infolgedessen die Frage nach dem, was den einzelnen Sätzen axiomatisch zugrunde liegt. Auch insofern ist eine Klärung des Sachverhalts wünschenswert.

Das Resultat erweist sich in zwei Punkten als durchaus eigenartig. Die Vergleichung der Mengen bezüglich ihres Größencharakters ist nämlich nichts, was dem Mengenbegriff allein eigentümlich ist; sie betrifft allgemeiner *alle Objekte*, für die man das *Ganze* und den *Bestandteil* unterscheiden kann. Die Axiomatik, die hier entwickelt wird, ist also richtiger *eine Axiomatik der Größenlehre*, und zwar in dem besonderen Fall, daß es auch Größen von *unendlichem* Charakter gibt. Dies bedingt, daß die *Elemente* der Mengen im folgenden *gar nicht benutzt werden*; immer nur bilden die an sich möglichen Beziehungen zwischen den Ganzen und ihren Teilen den Gegenstand der Untersuchung. Deren auf axiomatischer Grundlage ruhende, umfassende Erörterung bildet den eigentlichen Inhalt der Arbeit. Ich habe aber doch die gewohnten Mengenbezeichnungen beibehalten. Für die *Elemente der Mengen* wird erst am Schluß eine auf

den Begriff der Teilmenge sich stützende Einführungsmöglichkeit gezeigt. Sie erscheinen als solche Teilmengen, die selbst nicht weiter in Teilmengen zerlegbar sind (gleichsam als die Atome).

Eine zweite Eigenart der Untersuchung betrifft die logischen Notwendigkeiten, die der axiomatische Aufbau dieses besondern Gebietes verlangt. Außer den selbstverständlichen axiomatischen Festsetzungen über die Regeln, nach denen man mit den Begriffen der Äquivalenz, der Teilmengen usw. zu operieren hat, treten auch noch Annahmen auf, die man wohl nicht erwarten mag. Bei ihrer Einführung handelt es sich aber — und darin besteht die genannte Eigenart — weniger um spezifisch mathematische Notwendigkeiten, als vielmehr um *rein logische;* also um Festsetzungen, die deshalb nötig sind, weil man ohne sie — um welches wissenschaftliche Gebiet es sich handeln mag — aus den in Frage stehenden Voraussetzungen *Schlüsse überhaupt nicht ableiten kann.* Ein allgemeiner Grundsatz der Logik lautet: E mere negativis nihil sequitur; d. h. aus lauter negativen Prämissen kann eine Folgerung nicht gezogen werden. Aus den Sätzen

kein $\mathfrak{A}$ ist ein $\mathfrak{B}$, kein $\mathfrak{B}$ ist ein $\mathfrak{C}$

läßt sich in der Tat eine Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ nicht entnehmen; und ebenso wenig gestatten die Sätze

kein $\mathfrak{B}$ ist ein $\mathfrak{A}$, kein $\mathfrak{C}$ ist ein $\mathfrak{A}$

eine Beziehung zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$[3]). Gerade solche Prämissen sind es aber, die uns bei den mengentheoretischen Problemen mehrfach begegnen, und deshalb der Einführung einer zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ oder zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ vorhandenen Beziehung den Stempel der axiomatischen Notwendigkeit aufdrücken.

§ 1.
Die Äquivalenz.

Die mathematischen Objekte, von denen im folgenden die Rede sein wird, heißen *Mengen* (Teilmengen, Verbindungsmengen). Alle sollen den-

---

[3]) Aus den Vordersätzen

$\mathfrak{A}$ ist nicht $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ ist nicht $\mathfrak{C}$

kann freilich in gewissen Fällen doch eine positive Folgerung gezogen werden und zwar für $\mathfrak{A}$ selbst. Nämlich dann, wenn man eine zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestehende positive Beziehung kennt. Aus den Sätzen:

Das Dreieck $\mathfrak{D}$ ist nicht spitzwinklig; und
Das Dreieck $\mathfrak{D}$ ist nicht stumpfwinklig

folgt, daß $\mathfrak{D}$ rechtwinklig ist. Hier liegen nämlich nur scheinbar ausschließlich negative Prämissen vor; zu ihnen kommt als positive der Satz: Jedes Dreieck ist entweder spitzwinklig oder stumpfwinklig oder rechtwinklig. Vgl. auch die Anmerk. auf S. 182.

selben Äquivalenzbeziehungen gehorchen, die wir als *Axiome der Äquivalenz* ($\sim$) einführen. Sie lauten: Sind M, N, P verschiedene Mengen, so gilt

I. Aus $M \sim N$ folgt $N \sim M$.

II. Aus $M \sim N$ und $N \sim P$ folgt $M \sim P$.

Der Äquivalenzbegriff hat also sowohl *kommutativen*, wie auch *assoziativen* Charakter.

Aus diesen Axiomen folgt:

1. Aus $M \sim N$ und N *nicht* $\sim P$ folgt M *nicht* $\sim P$. Denn wäre $M \sim P$, so würde daraus in Verbindung mit $N \sim M$ gemäß I weiter $N \sim P$ folgen, im Gegensatz zur Voraussetzung.

Die Axiome I und II zeigen, daß sie die Ausdehnung auf den Fall zulassen, daß M und N dieselbe Menge bedeuten. Wir fügen also als weiteres Axiom hinzu

III. Es ist $M \sim M$.

§ 2.

Teilmengen und Verbindungsmengen.

Ist M' Teilmenge von M, so soll dies durch

$$M' t M$$

bezeichnet werden. Wir nehmen durchweg an, daß M' von M *verschieden* ist, und nennen insofern M' auch echte oder eigentliche Teilmenge von M.

Für die Teilmengen sollen folgende Axiome gelten (*Axiome der Teilmengen*):

I. Aus $M' t M$ und $M'' t M'$ folgt $M'' t M$.

II. Jede Teilmenge M' von M bestimmt eindeutig eine zweite Teilmenge M_1 von M, die ihre *Komplementärmenge* bezüglich M heißt.

III. Die Komplementärmenge von M_1 ist wiederum M'.

Wir dürfen daher folgende Bezeichnungen einführen. Wir schreiben $M_1 k M'$ resp. $M' k M_1$ und setzen demgemäß (III) in die Form

III'. Aus $M_1 k M'$ folgt $M' k M_1$.

Für die Beziehung von M_1 und M' zur Menge M selbst schreiben wir

$$M = (M_1, M') = (M', M_1),$$

und sagen, daß M in die Teilmengen M' und M_1 zerfällt. Zusammenfassend können wir also sagen:

Aus $M' t M$ folgt $M_1 t M$, $M_1 k M'$, $M' k M_1$, $M = (M', M_1)$.

Seien nun M und N zwei Mengen, so können bezüglich ihrer Teilmengen zwei Fälle eintreten. Entweder gibt es für M und N identische

Teilmengen, oder es gibt keine solchen Teilmengen. In diesem Fall nennen wir die Mengen *fremd* zueinander, oder kurz fremd, und schreiben

$$MfN \quad \text{resp.} \quad NfM.$$

Für fremde Mengen gilt der Satz:

1. Sind M und N fremde Mengen, so ist auch jede Teilmenge von M zu jeder Teilmenge von N fremd; d. h.

Aus MfN, $M'tM$, $N'tN$ folgt $M'fN'$.

Wären nämlich die Teilmengen M' und N' nicht fremd, und ist P eine in beiden enthaltene Teilmenge, so hätte man

$$PtM', \quad M'tM \quad \text{und} \quad PtN', \quad N'tM,$$

und daher gemäß I auch

$$PtM \quad \text{und} \quad PtN,$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung.

1a. Der Satz gilt auch so, daß M' zu N selbst, und ebenso N' zu M fremd ist. Der Beweis ist derselbe.

Wir stellen weiter folgende Axiome auf:

IV. *Die beiden Komplementärmengen M' und M_1 einer Menge M sind fremde Mengen*; d. h.

Aus M_1kM' folgt M_1fM'.

Diese Beziehung soll aber auch umgekehrt gelten; zu diesem Zweck führen wir folgendes weitere Axiom ein (*Axiom der Verbindungsmengen*).

V. *Zwei fremde Mengen N und P bestimmen eine und nur eine Menge M, deren Komplementärmengen sie sind*; d. h.

Aus NfP folgt NtM, PtM und NkP.

Die Axiome IV und V lassen sich also auch so auffassen, daß die Beziehungen NkP und NfP gleichwertig sind. Wir nennen die Menge (N, P) die *Verbindungsmenge* von N und P. Es folgt noch

2. Die Mengen N und P sind von ihrer Verbindungsmenge $M = (N, P)$ verschieden.

Denn da sie nach V Komplementärmengen von M sind, so ist jede eine echte Teilmenge von M.

Die Menge (N, P) hat außer N und P gemäß Axiom I auch jede Teilmenge N' und P' zu Teilmengen. Damit sind aber, wie wir durch ein weiteres Axiom festsetzen, nicht ihre sämtlichen Teilmengen erschöpft. Gemäß Satz 1 und 1a ist auch N' zu P' fremd, ebenso N' zu P und N zu P'; nach Axiom V gibt es daher je eine Menge

$$(N', P'), \quad (N, P') \quad \text{und} \quad (N', P).$$

Für sie setzen wir nun fest:

VI. *Ist $M = (N, P)$, so sind auch die Mengen*

$$(N', P'),\quad (N', P),\quad (N, P')$$

Teilmengen von M; es ist aber auch jede von N, N' P, P' verschiedene Teilmenge von dieser Form.

Wir folgern hieraus den Satz:

3. Ist $M = (N, P)$ und ist die Menge Q fremd zu N und fremd zu P, so ist sie auch fremd zu M; d. h. aus QfN und QfP folgt $Qf(N, P)$.

Wäre nämlich die Menge Q nicht fremd zu M, so gäbe es für sie und M eine identische Teilmenge; d. h. es gäbe eine Teilmenge Q', die gemäß VI eine der Formen

$$N, N',\quad P, P',\quad (N, P'),\quad (N', P),\quad (N', P')$$

haben müßte. Diese Teilmenge Q' hätte also jedenfalls N oder P oder eine Teilmenge von N oder P als Teilmenge; d. h. es gäbe eine Teilmenge Q'' von Q', die mit N oder P oder einer Teilmenge von N oder P identisch wäre. Nun ist aber nach I Q'' auch Teilmenge von Q und damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Voraussetzung.

Der Satz 3 läßt sich auch in die Form setzen:

3a. Ist die Menge Q nicht fremd zur Menge (N, P), aber fremd zu N, so ist sie nicht fremd zu P.

Will man den Begriff der Verbindungsmenge auf mehr als zwei Mengen ausdehnen, so hat man ein neues Axiom nötig. Es ist jedoch für das Folgende nicht erforderlich, dies näher auszuführen.

§ 3.

Die Verknüpfung der Mengen.

Die verschiedenen Beziehungen, die zwischen zwei Mengen M und N Platz greifen können, sind aus der folgenden von Cantor angegebenen Aufzählung aller Möglichkeiten ersichtlich, die unsern Ausgangspunkt abgeben soll:

a) Es gibt ein $M' \sim N$, und ein $N' \sim M$.

b) Es gibt kein $M_1 \sim N$, aber ein $N' \sim M$.

c) Es gibt ein $M' \sim N$, aber kein $N_1 \sim M$.

d) Es gibt kein $M_1 \sim N$, und kein $N_1 \sim M$ [4]).

---

[4]) Die Anwendung oberer und unterer Indizes bei den Teilmengen im positiven und negativen Fall soll im allgemeinen zur Erleichterung der Auffassung beibehalten werden.

Wir wollen diese vier Beziehungen durch

(A) $MaN, \quad MbN, \quad McN, \quad MdN$

darstellen. Man erkennt zunächst unmittelbar:

1. Die Beziehungen a), b), c), d) schließen einander gegenseitig aus.

2. Die Beziehungen MaN und NaM, ebenso MdN und NdM sind identisch. Die Beziehung MbN ist identisch mit NcM.

Wir erörtern sofort, welche dieser Beziehungen sich auf den Fall ausdehnen lassen, daß M und N dieselbe Menge bedeuten. Es findet sich

2a. Die Beziehungen MbM und McM sind widerspruchsvoll. Sie fordern nämlich das gleichzeitige Bestehen von

$$M' \sim M \quad \text{und} \quad \textit{kein}\ M_1 \sim M.$$

Dagegen sind die Beziehungen MaM und MdM widerspruchsfrei. Übrigens läßt sich dies auch als unmittelbare Folge von 1 und 2 auffassen.

Sei P eine weitere Menge, so besteht zwischen N und P ebenfalls eine der Beziehungen

(B) $NaP, \quad NbP, \quad NcP, \quad NdP,$

und es entsteht die Frage, welche Folgerung sich für die Mengen M und P einstellt, wenn man eine Beziehung der Reihe (A) mit einer Beziehung der Reihe (B) kombiniert. Diese Aufgabe läßt sich ohne Einführung neuer Axiome nicht erledigen. Ein erstes, das den Begriff der Teilmenge mit dem der Äquivalenz verbindet, sei das folgende:

I. *Aus den Relationen*

$$M'tM, \quad M \sim N$$

lassen sich die Relationen

$$N'tN, \quad N' \sim M'$$

folgern; d. h. ist $M \sim N$, so bedingt eine jede Teilmenge M' von M die Existenz einer Teilmenge N' von N, die zu M' äquivalent ist.

Vielleicht mag man erwarten, daß die Menge N' als diejenige wohlbestimmte Menge eingeführt wird, die der Menge M' *gemäß der zwischen M und N bestehenden Äquivalenz* entspricht. Aber dies ist für den hier vorgenommenen Aufbau — jedenfalls an dieser Stelle — weder möglich noch nötig. Es genügt, die *Existenz* einer Menge N' zu fordern; welches diese Menge ist, darf ganz offen bleiben. Es hängt dies damit zusammen, daß die Äquivalenz $M \sim N$ in ihrer besondern Eigenart hier nicht in Frage kommt; nur die *Relationen*, die die Eigenart des Äquivalenzbegriffs kennzeichnen, und für zwei Mengen und ihre Teilmengen bestehen, werden in Betracht gezogen.

Einen Teil der oben gestellten Frage hat bekanntlich schon Cantor selbst beantwortet; man zeigt leicht

3. Aus MaN und NaP folgt MaP.
4. Aus MaN und NbP folgt MbP.
5. Aus MaN und NcP folgt McP.
6. Aus MbN und NbP folgt MbP.
7. Aus McN und NcP folgt McP [5]):

Die Beweise sind natürlich ausschließlich auf die in a), b), c), d) enthaltenen Beziehungen zu stützen. Ein Beispiel möge zeigen, wie sie sich führen lassen. Um aus den Relationen

$$MbN \quad \text{und} \quad NbP \quad \text{weiter} \quad MbP$$

zu folgern, haben wir von

$$\textit{kein}\ M_1 \sim N, \quad \textit{ein}\ N' \sim M,$$
$$\textit{kein}\ N_1 \sim P, \quad \textit{ein}\ P' \sim N$$

auszugehen [5a]), und daraus die Beziehungen

$$\textit{kein}\ M_1 \sim P, \quad \textit{ein}\ P' \sim M$$

abzuleiten. Wir beweisen zunächst den zweiten Teil. Wegen $P' \sim N$ gibt es nach I eine Teilmenge $P'' \sim N'$, und aus $N' \sim M$ folgt nun $P'' \sim M$. Die Richtigkeit der ersten Behauptung erweisen wir indirekt. Wäre nämlich ein $M' \sim P$, so folgte gemäß I aus $N' \sim M$ wiederum die Existenz einer Menge N'' von N', für die $N'' \sim M'$ sein müßte, und aus

$$M' \sim P, \quad N'' \sim M' \quad \text{weiter} \quad N'' \sim P,$$

während kein $N_1 \sim P$ sein kann.

Es bleibt noch übrig, das gleichzeitige Bestehen der Beziehungen

$$MbN \quad \text{und} \quad NcP$$

zu untersuchen, sowie die Kombination von MdN mit einer der Beziehungen

$$NaP, \quad NbP, \quad NcP, \quad NdP.$$

Hier gilt zunächst, daß aus MbN und NcP eine bestimmte Beziehung zwischen M und P nicht folgt; d. h.

8. Mit MbN und NcP ist jede der vier Beziehungen MaP, MbP, McP, MdP verträglich.

---

[5]) Diese Tatsachen entsprechen bekanntlich dem Umstand, daß wenn man den Fällen a, b, c die Beziehungen „gleich", „kleiner", „größer" zuweist, die für diese Beziehungen geltenden assoziativen Gesetze erfüllt sind (z. B. aus $\alpha = \beta$ und $\beta = \gamma$ folgt $\alpha = \gamma$ usw.).

[5a]) Es ist klar, daß *ein* $N' \sim M$ usw. nicht die Bedeutung hat von „nur ein" sondern von „mindestens ein".

Der Beweis darf unterbleiben. Nur sei bemerkt, daß dies dem realen Tatbestand entspricht, dessen axiomatische Grundlegung hier in Frage steht [6]).

Wir gehen nun zu dem Rest unseres Problems über und prüfen zunächst die Kombination von

$$(\alpha) \qquad MdN \text{ und } NdP.$$

Die Frage lautet auch hier, ob die Beziehungen (α) eine *bestimmte* Beziehung zwischen M und P bedingen und eventuell *welche*. Hier liegt der in der Einleitung genannte Fall vor, daß es sich um lauter negative Prämissen handelt. Diese Prämissen sind

$$(\alpha') \qquad \begin{cases} \textit{kein } M_1 \sim N, & \textit{kein } N_1 \sim M, \\ \textit{kein } N_1 \sim P, & \textit{kein } P_1 \sim N. \end{cases}$$

Aus ihnen läßt sich auf direktem Wege über die Beziehung von M zu P *nichts schließen*. Teilweise gelingt es allerdings auf indirektem Wege; in einzelnen Fällen kommt nämlich dadurch zu den obigen Prämissen eine neue Tatsache hinzu, die positiver Natur ist. Um die Untersuchung durchzuführen, hat man nämlich zu prüfen, ob die Annahme einer der Beziehungen

$$(\beta) \qquad MaP, \; MbP, \; McP, \; MdP$$

auf Grund der bisherigen axiomatischen Festsetzungen einen Widerspruch mit dem gleichzeitigen Bestehen der Beziehungen (α) bedingt, und zwar kommen naturgemäß hier nur die Axiome von § 1, das obige Axiom § 3, I und der obige Satz 2 in Frage. Diese Prüfung haben wir ausführlich vorzunehmen [7]).

Zunächst sieht man leicht, daß die Beziehungen

$$MbP \text{ und ebenso } McP$$

als Folgen von (α) auszuschließen sind. Wegen Satz 2 kann man nämlich die Beziehungen (α) auch in die Form

$$PdN \text{ und } NdM$$

setzen, und müßte daher als Folge von (α) ebenso auch

$$PbM \text{ oder } PcM$$

erhalten. Aber MbP und PbM, und ebenso McP und PcM sind nach Satz 2 nicht identisch, womit die Behauptung erwiesen ist [8]).

---

[6]) Für Mächtigkeiten würden die Relationen $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n} > \mathfrak{p}$ bestehen; sie bedingen keine Größenbeziehung zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$.

[7]) In den Math Ann. 72 (1912), S. 551, ist diese Untersuchung schon teilweise durchgeführt worden.

[8]) Die logische Eigenart des oben behandelten Problems entspricht also nicht ganz dem in der Einleitung genannten Tatbestand. Es lautet nämlich genauer so:

Es ist weiter zu untersuchen, ob sich die Beziehung

$$(\gamma) \qquad MaP$$

als Folge von (α) einstellen kann. Hier ist ein Resultat, das dies unmöglich macht, nicht erhältlich. Die Beziehung MaP bedeutet nämlich

$$(\gamma') \qquad \textit{ein } M' \sim P, \quad \textit{ein } P' \sim M.$$

Die Verbindung mit (α) liefert gemäß § 1 die weiteren Relationen

$$\textit{kein } N_1 \sim P', \quad \textit{kein } N_1 \sim M'.$$

Genauer bedeutet dies: Es gibt eine Teilmenge P', der keine Teilmenge von N äquivalent ist, und es gibt auch eine Teilmenge M', der keine Teilmenge von N äquivalent ist. Dies stellt aber einen Widerspruch zu (α') oder zu (γ') nicht dar.

Es soll noch eine zweite Prüfung vorgenommen werden; wir haben auch den assoziativen Charakter der Beziehungsregeln in Betracht zu ziehen. Ist MaP das Resultat von (α), so heißt dies, daß das gleichzeitige Bestehen von

$$MdN, \quad NdP, \quad MaP$$

nicht widerspruchsvoll sein darf. Nun sollen aber zwei von diesen Bedingungen stets eine dritte bedingen, und daraus folgt, daß aus

$$MaP \text{ und } PdN \text{ wieder } MdN$$

und aus

$$NdM \text{ und } MaP \text{ wieder } NdP$$

folgen muß. Es ist nun die Frage, ob diese Regeln einen widerspruchslosen Charakter haben. Dies ist in der Tat der Fall. Man sieht es am einfachsten daraus, daß man die assoziativen Gesetze, die die Beziehungen

---

Welche von vier möglichen Beziehungen wird durch die dem Problem eigentümlichen nur negativen Prämissen ausgeschlossen? Bei der Annahme, MbN oder McN seien die Folgen dieser negativen Prämissen, wird von selbst eine neue Tatsache eingeführt; die Symmetrie der Beziehungen MdN und NdP bezüglich M und P steht nämlich im Gegensatz zu der Unsymmetrie der Folgerungen MbP oder McP für M und P. Und daher ergab sich oben ein Resultat. Die Annahme, MaP oder MdP seien die Folgen der negativen Prämissen, liefert dagegen eine solche neue Tatsache nicht; es ergibt sich daher, wie das obige weiter zeigt, ein Resultat nicht.

Allgemeiner gesprochen: Wenn die Prämissen: $\mathfrak{A}$ ist nicht $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist nicht $\mathfrak{C}$ sich auch in die Form setzen lassen: $\mathfrak{C}$ ist nicht $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist nicht $\mathfrak{A}$, so kann damit nur eine solche Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ vereinbar sein, die zugleich die *nämliche* Beziehung zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ bedeutet. Eine genauere Analyse des hiermit mehrfach besprochenen logischen Problems von seiten der Logiker wäre sehr erwünscht. Das letzte Wort soll mit dem vorstehenden nicht gesprochen sein.

(a) und (d) miteinander verbinden, wenn man noch Satz 3 beachtet, in die einfache Form

$$(aa) = (dd) = a, \quad (ad) = (da) = d$$

setzen kann; sie sind das genaue Analogon zu den Vorzeichenregeln

$$(+)(+) = (-)(-) = +; \quad (+)(-) = (-)(+) = -,$$

deren assoziativer Gesamtcharakter feststeht.

Wir haben endlich noch die Beziehung

$$(\delta) \qquad MdP$$

als mögliche Folge der Beziehungen (α) zu erörtern. Sie bedeutet

$$(\delta') \qquad \textit{kein } M_1 \sim P, \quad \textit{kein } P_1 \sim M.$$

Hier zeigt sich zunächst, daß sich aus ihr und den Relationen (α') weitere direkte Folgerungen überhaupt nicht entnehmen lassen, da sie jetzt *samt und sonders* negativer Natur sind. Wir prüfen auch hier noch den assoziativen Gesamtcharakter. Ist MdP das Resultat von MdN und NdP, so bedingt es jetzt, daß aus

MdP und PdN wieder MdN

und aus MdM und MdP wieder MdP

folgt; hier aber ist der widerspruchsfreie Charakter evident. Also folgt:

9. *Mit den Beziehungen MdN und NdP kann sowohl die Beziehung MaP, wie MdP zugleich bestehen.*

Keine der beiden Annahmen γ und δ führt also auf einen Widerspruch mit den in (α') enthaltenen Prämissen; wir können daher auf diesem Wege nicht zu einem Resultat über die vorliegende Frage gelangen. Man muß daher in der Tat die Folgerung, die sich aus MdN und NdP ergeben soll, *axiomatisch einführen*; naturgemäß so, wie es durch den realen Tatbestand der Mengenlehre gefordert wird. Ihn aufzubauen ist ja einer der Zwecke dieser Darstellung[*]). Wir setzen daher fest (*Axiom der Verknüpfung*)

II. *Aus MdN und NdP folgt MdP.*

Dieses Axiom hat einen doppelten Charakter, einen rein logischen, und einen mathematischen. Es enthält die logische Forderung, daß aus zwei bestimmten Prämissen der Reihen (A) und (B) — wenn sie nicht etwa

[*]) Das obige Axiom entspricht im Rahmen der Cantorschen Theorie inhaltlich der Forderung der Vergleichbarkeit. Der Text zeigt, daß dieser Forderung eine gewisse rein logische Bedeutung inne wohnt. Man kann natürlich eine Mengenlehre auch so aufzubauen suchen, daß man die Unvergleichbarkeit als möglich zuläßt. Davon ist hier abgesehen worden; vgl. übrigens auch § 7.

einander widersprechen — stets *ein und nur ein* Schluß gefolgert werden soll; außerdem die mathematische, daß es gerade der in II enthaltene sein soll. Aus ihr erhalten wir nun leicht die Antwort auf die noch ausstehenden Verknüpfungen für die Beziehungen (A) und (B). Zunächst beweist man

10. Aus MbN und NdP folgt MbP.

10a. Aus McN und NdP folgt McP.

Für den Beweis von (10) haben wir auszugehen von

$$\textit{kein}\ M_1 \sim N, \quad \textit{ein}\ N' \sim M,$$
$$\textit{kein}\ N_1 \sim P, \quad \textit{kein}\ P_1 \sim N,$$

und daraus die Beziehung MbP, also

$$\textit{kein}\ M_1 \sim P, \quad \textit{ein}\ P' \sim M$$

abzuleiten. Wir folgern zunächst, daß eine Beziehung

$$M'' \sim P$$

unmöglich ist. Aus $N \sim M$ würde nämlich auf Grund dieser Annahme die Existenz einer Teilmenge N'' folgen, für die

$$N'' \sim M'' \sim P$$

wäre, im Widerspruch zu *kein* $N_1 \sim P$. Damit ist die Beziehung *kein* $M_1 \sim P$ erwiesen. Es ist jetzt noch zu zeigen, daß es ein $P' \sim M$ gibt. Wäre dies nicht der Fall, so bestände auf Grund des vorstehenden jetzt die Beziehung

$$\textit{kein}\ M_1 \sim P, \quad \textit{kein}\ P_1 \sim M,$$

also die Relation MdP, und zusammen mit der vorausgesetzten Beziehung PdN folgte gemäß Axiom II die Beziehung MdN, im Widerspruch zu MbN. Damit ist der Beweis wieder geliefert. Ebenso wird der Beweis für McN und NdP geführt, was einer ausführlichen Darstellung nicht bedarf.

Wir haben schließlich noch die Kombination von

$$MaN \quad \text{und} \quad NdP$$

zu erörtern. Wir folgern zunächst, daß diese beiden Relationen an sich nur die Folge

$$MdP$$

gestatten. Wir haben auszugehen von

$$M' \sim N, \quad N' \sim M,$$
$$\textit{kein}\ N_1 \sim P, \quad \textit{kein}\ P_1 \sim N,$$

und zeigen zunächst, daß hiermit nur

$$\textit{kein } M_1 \sim P, \quad \textit{kein } P_1 \sim M,$$

verträglich sind. Gäbe es nämlich eine Menge $M'' \sim P$, so folgerte man wie oben eine Relation

$$N'' \sim M'' \sim P$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung: *kein* $N_1 \sim P$; ebenso folgt die Unmöglichkeit einer Beziehung $P'' \sim M$. Es kann also an sich nur die Relation

$$MdP$$

bestehen. Wiederum ist noch der assoziative Charakter des Resultats zu prüfen. Diese Prüfung führt hier auf einen Widerspruch. Aus MdP und NdP würde nämlich gemäß dem Axiom II MdN folgen, im Widerspruch mit der Annahme MaN. Das gleichzeitige Bestehen von MaN und NdP führt also auf einen Widerspruch; d. h.

11. *Die Beziehungen MaN und NdP können nicht zugleich bestehen.*

Dagegen sei ausdrücklich festgestellt, daß die Sätze 10 und 10a einen solchen Widerspruch nicht herbeiführen. Denn gemäß Satz 2 ist MbP mit PcM identisch, und die beiden Beziehungen

$$PcM \quad \text{und} \quad MbN$$

sind, wie wir oben unter 8. erwähnten, mit jeder der vier an sich möglichen Beziehungen zwischen N und P verträglich.

Damit ist unsere Untersuchung abgeschlossen; sie zeigt zugleich *die Widerspruchslosigkeit des Axioms* II. Wir ziehen aus ihm zunächst noch eine Folgerung, nämlich die, daß der Satz 11 auch in der Weise gilt, daß er das gleichzeitige Bestehen von

$$MaM \quad \text{und} \quad MdN, \quad \text{sowie von} \quad MaN \quad \text{und} \quad NdN$$

ausschließt. Aus MaM folgt $M' \sim M$ und hieraus gemäß § 3, I

$$M'' \sim M' \sim M,$$

und daher besteht auch die Relation

$$M'aM;$$

diese kann aber nach Satz 11 nicht mit MdN zugleich bestehen.

Weiter folgt aus MaN zunächst

$$M' \sim N, \qquad N' \sim M,$$

also auch $N'' \sim M' \sim N$, während dagegen NdN besagt, daß *kein* $N_1 \sim N$ ist. Also

11a. *Die Beziehungen MaM und MdN, ebenso MaN und NdN schließen einander aus.*

Es ergibt sich damit das folgende Schlußresultat. *Mit den Beziehungen*

$$MdN \quad \text{und} \quad NdP$$

erscheint sowohl die Folgerung MaP wie auch die Folgerung MdP verträglich. Wird die Relation MdP axiomatisch als Folgerung eingeführt, so bedingt dies, daß die Beziehungen MaN und NdP nicht zugleich bestehen können; würde man dagegen die Beziehung MaP axiomatisch als Folgerung einführen, so ergibt sich ein derartiges Resultat nicht. Trotzdem erfordert der Aufbau der Mengenlehre die Einführung der Folgerung MdP. Auf die Deutungsmöglichkeit der axiomatischen Annahme MaP komme ich in § 7 zurück.

Für die Beziehungen (a), (b), (c), (d) gelten noch die folgenden besonderen Sätze:

12. Aus den Relationen

$$MaN,\quad MbN,\quad McN,\quad MdN$$

und

$$M \sim \mathfrak{M},\quad N \sim \mathfrak{N}$$

folgt auch

$$\mathfrak{M}aN,\quad \mathfrak{M}bN,\quad \mathfrak{M}cN,\quad \mathfrak{M}dN$$

und

$$Ma\mathfrak{N},\quad Mb\mathfrak{N},\quad Mc\mathfrak{N},\quad Md\mathfrak{N}.$$

Für den Beweis mag ein Beispiel genügen. Werde von

$$MbN \quad \text{und} \quad M \sim \mathfrak{M}$$

ausgegangen, so heißt dies

$$N' \sim M, \quad \text{jedes } M_1 \text{ nicht} \sim N.$$

Wir erhalten daher, falls $\mathfrak{M}_1 \sim M_1$ ist, gemäß § 1 sofort

$$N' \sim \mathfrak{M}, \quad \text{jedes } \mathfrak{M}_1 \text{ nicht} \sim N,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

13. *Aus $M'tM$ folgt $M'aM$ oder $M'bM$; d. h. für jede Teilmenge M' gilt entweder $M'aM$ oder $M'bM$.*

Es gibt nämlich eine Teilmenge von M, die äquivalent M' ist, nämlich M' selbst, und daher ist die Beziehung (c) und (d) ausgeschlossen.

14. Aus $M'tM$ und MbN folgt $M'bN$; d. h. besteht die Beziehung MbN, so besteht für jede Teilmenge M' von M die Beziehung $M'bN$.

Man hat nämlich gemäß 13. und nach Voraussetzung

$$M'aM \quad \text{oder} \quad M'bM \quad \text{und} \quad MbN,$$

und damit gemäß Satz 4 und 6 die Behauptung.

15. Aus $M' t M$, $M'' t M'$, $M'' b M'$ folgt $M'' b M$; d. h. sind M' und M'' Teilmengen von M, für die die Beziehung $M'' b M'$ gilt, so ist auch $M'' b M$ [10]).

Man hat nämlich wieder zugleich (nach 13.)

$$M'' b M' \quad \text{und} \quad M' a M \quad \text{oder} \quad M' b M$$

und folgert daraus wie eben $M'' b M$.

§ 4.
Endliche und unendliche Mengen.

Nach § 3, Satz 1 und 2 sind $M a M$ und $M d M$ die beiden einzigen der Beziehungen (a), (b), (c), (d), die eine Menge zu sich selbst haben kann; wir definieren nun: 1. Eine Menge heißt *unendlich*, wenn die Beziehung $M a M$ besteht; sie heißt *endlich*, wenn $M d M$ gilt. Man hat also im ersten oder zweiten Fall

$$\textit{ein } M' \sim M; \quad \textit{kein } M_1 \sim M,$$

und damit die *Dedekindsche Begriffsbestimmung*.

Wir folgern zunächst:

2. Aus $M a M$ oder $M d M$ und $M \sim \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{M} a \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M} d \mathfrak{M}$. Dies ist eine unmittelbare Folge von § 3, 12.

Für endliche und unendliche Mengen bestehen gewisse Sondersätze; diese sollen jetzt abgeleitet werden. Das Haupttheorem lautet:

3. *Für unendliche Mengen können nur die Beziehungen* (a), (b), (c) *bestehen*; *für endliche Mengen nur* (b), (c), (d).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den in § 3 abgeleiteten Resultaten.

Sind nämlich M und N unendliche Mengen, und würde die Beziehung $M d N$ bestehen, so hätte man

$$M a M \quad \text{und} \quad M d N,$$

und dies verstößt gegen Satz 11a von § 3.

Ebenso, wenn M und N endliche Mengen sind, so hätte man, falls sie die Beziehung $M a N$ gestatten,

$$N a M \quad \text{und} \quad M d M,$$

und auch dies verstößt gegen Satz 11a von § 3.

Damit ist der Satz 3 bewiesen. Er gibt zugleich den inneren Grund für die im Satz 11 von § 3 enthaltene Unvereinbarkeit von $M a N$ und

[10]) Dieser Satz berührt sich inhaltlich mit dem Satz 25 in Zermelos Grundlagen (Math. Ann. 65, S. 271).

NdP. Denn unserem Satz 3 gemäß besagt MaN, daß M und N unendliche Mengen sind, und NdP, daß N und P endliche Mengen sind. Beides schließt sich aber aus.

4. *Für jede Teilmenge einer endlichen Menge besteht die Beziehung* $M'bM$; d. h. aus MdM und $M'tM$ folgt $M'bM$.

Gemäß Satz 13 von § 3 gilt nämlich für jede Menge M und eine Teilmenge M' von ihr

$$M'aM \quad \text{oder} \quad M'bM.$$

Hierzu kommt, da M eine endliche Menge ist, MdM. Diese Beziehung kann aber nach Satz 11 von § 3 mit $M'aM$ nicht zugleich bestehen; also muß es $M'bM$ sein.

Die weiteren noch abzuleitenden Sätze machen die Einführung eines neuen Axioms nötig, und zwar eines *Axioms über die Äquivalenz von Verbindungsmengen*. Es lautet:

I. Aus $M=(N,P)$, $N \sim \mathfrak{N}$, $P \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}f\mathfrak{P}$ folgt $(N,P) \sim (\mathfrak{N},\mathfrak{P})$; d. h. *werden in der Verbindungsmenge* (N,P) *die Mengen* N *und* P *durch die zu ihnen äquivalenten, zueinander fremden Mengen* $\mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{P}$ *ersetzt, so ist die neue Menge der ursprünglichen äquivalent.*

Das Axiom gilt gemäß § 1, III auch für den Fall, daß nur eine Menge durch eine äquivalente ersetzt wird, d. h.

5. Aus $M=(N,P)$, $N \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}fP$ folgt $(N,P) \sim (\mathfrak{N},P)$ [11].

Wir beweisen nun der Reihe nach folgende Sätze:

6. *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist selbst eine endliche Menge*; d. h. aus MdM, $M'tM$ folgt $M'dM'$.

Wäre nämlich M' eine unendliche Menge, so müßte eine Beziehung

$$M'' \sim M'$$

bestehen. Setzt man nun

$$M=(M', M_1),$$

so ist gemäß § 2, VI auch

$$M''' \sim (M'', M_1)$$

eine Teilmenge von M und aus Satz 5 folgte

$$M''' \sim M,$$

was einen Widerspruch gegen MdM darstellt.

7. *Ist* M *eine endliche,* N *eine unendliche Menge, so kann nur die Beziehung* MbN *bestehen* [12]; d. h. aus MdM und NaN folgt MbN.

---

[11]) Es liegt nahe, Satz 5 als Axiom hinzustellen, und das Axiom als Folge. Der Beweis hätte aber die sachlich überflüssige Annahme $\mathfrak{N}fP$ nötig.

[12]) Auf diesen Satz wurde ich schon vor längerer Zeit von Herrn H. Hahn aufmerksam gemacht.

Der Beweis wird so geführt, daß die Unvereinbarkeit der Voraussetzungen mit MaN, McN, MdN gezeigt wird.

Würde zunächst die Beziehung MaN bestehen, so hätte man $M' \sim N$; und demgemäß erhielte man aus der Annahme MaN nach § 3 Satz 12 weiter auch

$$MaM' \quad \text{resp.} \quad M'aM,$$

was aber, da M endliche Menge ist, gegen Satz 4 verstößt.

Wäre zweitens McN in Kraft, so folgte daraus $M' \sim N$, und nun hieraus und aus NaN weiter

$$M'aM',$$

was wiederum einen Widerspruch zum Satz 6 darstellt.

Endlich ist auch die Beziehung MdN unmöglich. Denn aus NaN folgt zunächst

$$N' \sim N;$$

hieraus und aus NaN und der angenommenen Relation MdN folgte dann weiter

$$NaN' \quad \text{und} \quad MdN' \quad \text{resp.} \quad N'dM.$$

Die Beziehungen NaN' und $N'dM$ sind aber gemäß § 3 Satz 11 nicht zugleich möglich. Also gilt in der Tat die Beziehung MbN.

8. Ist M eine unendliche Menge, so ist auch die Verbindungsmenge (M, N) eine unendliche Menge.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge des Axioms I. Denn

$$\text{aus } M' \sim M \text{ folgt } (M, N) \sim (M', N),$$

und damit ist der Satz, da (M', N) Teilmenge von (M, N) ist, bewiesen.

9. Eine Menge ist unendlich, wenn sie eine unendliche Teilmenge hat.

Ist nämlich M' diese Teilmenge, so ist

$$M = (M', M_1)$$

und daher gemäß Satz 8 auch M eine unendliche Menge.

Man kann diesen Satz auch noch so formulieren:

9'. Eine Menge ist endlich, wenn jede ihrer Teilmengen endlich ist.

10. *Ist M eine endliche Menge, so ist stets $Mb(M, N)$*; d. h. aus MdM folgt $Mb\,(M, N)$.

Es ist nämlich M Teilmenge von (M, N). Ist nun (M, N) endlich, so folgt der Satz aus 6, ist aber (M, N) unendlich, so folgt er aus 7.

Zur Ableitung weiterer Sätze bedürfen wir neuer Axiome. Das Axiom I besagt, daß die Verbindungsmengen äquivalenter Mengen selbst äquivalent sind; wir haben jetzt noch zwei Axiome nötig, die die *Nichtäquivalenz der Verbindungsmengen nicht äquivalenter Mengen* betreffen.

II. *Sind M und N fremde Mengen, ist M_1 Teilmenge von M und N_1 Teilmenge von N, und ist M_1 nicht $\sim M$, N_1 nicht $\sim N$, so folgt daraus die Beziehung (M_1, N_1) nicht $\sim (M, N)$*; d. h. *aus MfN, M_1tN, N_1tN, M_1 nicht $\sim M$, N_1 nicht $\sim N$ folgt (M_1, N_1) nicht $\sim (M, N)$.*

Dieses Axiom soll für *alle* Mengen gelten. Für endliche Mengen reicht es aber noch nicht aus, und werde durch das folgende ersetzt und ergänzt:

III. *Sind M und N fremde und zugleich endliche Mengen, und ist M_1 Teilmenge von M, so soll stets (M_1, N) nicht $\sim (M, N)$ sein, d. h. aus MfN, MdM, NdN, M_1tM folgt (M_1, N) nicht $\sim (M, N)$.*

Für unendliche Mengen braucht dieses Axiom bekanntlich nicht erfüllt zu sein.

Auch die Voraussetzungen dieser Axiome besitzen durchaus den in der Einleitung genannten logischen Sondercharakter; sie sind sämtlich negativer Natur, soweit es sich um die hier allein in Frage stehenden Äquivalenzbeziehungen handelt. Man könnte freilich annehmen, daß in diesem Fall ein indirektes Beweisverfahren zum Ziele führen werde; die Annahme

$$(M_1, N_1) \sim (M, N) \quad \text{resp.} \quad (M_1, N) \sim (M, N)$$

ist ja von positivem Charakter. Aber diese Vermutung trügt. Die Äquivalenz von Verbindungsmengen ist nämlich keineswegs nur so möglich, daß $M_1 \sim M$ und $N_1 \sim N$ ist, sondern auch auf andere Weise; und daher kann aus der angenommenen Äquivalenzbeziehung ein Widerspruch mit den Voraussetzungen

$$M_1 \textit{ nicht} \sim M, \quad N_1 \textit{ nicht} \sim N$$

nicht abgeleitet werden.

Die negative Fassung unserer Axiome stellt uns zunächst vor die Aufgabe, die bestimmte Beziehung (a), (b), (c), (d) aufzufinden, die zwischen (M, N) und den Mengen (M_1, N_1) und (M_1, N) besteht. Für das Axiom II kann es erst im nächsten Paragraphen geschehen; für das Axiom III soll es hier folgen.

Da (M_1, N) Teilmenge von (M, N) ist, so kann nach Satz 13 von § 3 nur die Beziehung (a) oder (b) realisiert sein. Aber der Fall (a), d. h.

$$(M_1, N)\, a\, (M, N)$$

ist unmöglich. Jede Teilmenge von (M_1, N) hat nämlich nach § 2, VI eine der Formen

$$M_1, M_2, N, N_1, (M_2, N), (M_1, N_1), (M_2, N_1),$$

wo M_2 eine Teilmenge von M_1 ist. Keine von ihnen kann aber zu

(M, N) äquivalent sein. Da nämlich M und N endliche Mengen sind, so hat man für sie gemäß 10. die Relationen

$$Mb(M, N) \quad \text{und} \quad Nb(M, N).$$

Gemäß Satz 4 hat man weiter

$$M_1 b M, \quad M_2 b M, \quad N_1 b N$$

und damit folgt die Behauptung nach Satz 6 von § 3 bereits für M_1, M_2, N, N_1. Für die drei Verbindungsmengen folgt sie aus den Axiomen selbst; es ist ja, da M und N endliche Mengen sind,

$$M_1 \text{ nicht} \sim M, \quad M_2 \text{ nicht} \sim M, \quad N_1 \text{ nicht} \sim N$$

und damit ist in der Tat die behauptete Nichtäquivalenz eine Folge von (II) und (III). Also

11. Für endliche (und fremde) Mengen M und N gilt die Beziehung

$$(M_1, N) b (M, N).$$

12. *Die Verbindungsmenge zweier endlichen Mengen ist selbst endlich*; d. h. aus MdM und NdN folgt $(M, N) d (M, N)$.

Wir haben nachzuweisen, daß die Beziehung

$$(M, N) a (M, N)$$

ausgeschlossen ist. Nun hat jede Teilmenge von (M, N) wieder eine der Formen

$$M, M_1, N, N_1, (M, N_1), (M_1, N), (M_1, N_1)$$

und wir beweisen, genau wie eben (vgl. auch § 5, 2), daß keine dieser Mengen zu (M, N) äquivalent ist. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 5.

Das Äquivalenzproblem.

Die wichtigste Aufgabe, die zu behandeln ist, betrifft den Nachweis, daß die Mengen M und N äquivalent sind, falls für sie die Beziehung

$$MaN \quad \text{oder} \quad MdN$$

besteht; also der Satz (Äquivalenzsatz)

1. *Aus MaN oder MdN folgt $M \sim N$.*

Ehe der Beweis geführt wird, sollen die Äquivalenz-Relationen vorangestellt werden, die sich aus den vorstehenden Paragraphen unmittelbar ergeben:

2. *Aus MbN und McN folgt M nicht $\sim N$.*

Wäre nämlich $M \sim N$, so hätte man auch (§ 3, 12)

$$NbN \quad \text{oder} \quad NcN,$$

was aber gemäß § 3, 3 widerspruchsvoll ist. Hieraus folgt unmittelbar weiter

3. *Mit* $M \sim N$ *ist nur* MaN *oder* MdN *verträglich.*

Die Umkehrung dieses Satzes 3 ist es, die den eigentlichen Äquivalenzsatz 1 bildet. Ist er bewiesen, so folgt endlich noch, als Umkehrung von 2.:

4. *Aus* M *nicht* $\sim N$ *folgt* MbN *oder* McN.

Man kann diese vier Sätze auch folgendermaßen zusammenfassen: *Die Beziehungen* (a) *und* (d) *sind hinreichende und notwendige Bedingungen für die Aequivalenz,* (b) *und* (c) *ebenso für die Nichtäquivalenz.*

Als Folge von 4. ergibt sich, was in § 3 und 4 noch offen bleiben mußte,

5. *Aus* $M_1 t M$ *und* M_1 *nicht* $\sim M$ *folgt* $M_1 b M$; d. h. *besteht für die Teilmenge* M_1 *von* M *die Beziehung* M_1 *nicht* $\sim M$, *so gilt* $M_1 b M$.

Denn nach 4. gilt $M_1 b M$ oder $M_1 c M$; nach Satz 13 von § 3 nur $M_1 a M$ oder $M_1 b M$, also gilt $M_1 b M$.

Eine Anwendung hiervon gibt auch Antwort auf die bezüglich des Axioms II in § 4 gestellte Frage. Es folgt jetzt

6. *Sind* M_1 *und* N_1 *Teilmengen von* M *und* N, *und ist* M_1 *nicht* $\sim M$, N_1 *nicht* $\sim N$, *so folgt daraus stets* $(M_1, N_1)\, b\, (M, N)$.

Wir gehen nun zum Satz 1 über und beweisen zunächst den ersten Teil, also den eigentlichen Bernsteinschen Äquivalenzsatz. Sein Beweis folgt aus dem Axiom II von § 4 über die Nichtäquivalenz der Verbindungsmengen.

Aus der Voraussetzung MaN folgt zunächst

$$\text{ein } M' \sim N, \quad \text{ein } N' \sim M.$$

Wäre nun M *nicht* $\sim N$, so hätte man nach § 1, 3

$$M \text{ nicht } \sim M', \quad N' \text{ nicht } \sim N.$$

Mit M und N sind aber auch M' und N' fremde Mengen (§ 2, 1); sie bestimmen daher eine Menge (M', N'), und für sie müßte gemäß Axiom II nunmehr

$$(M', N') \text{ nicht } \sim (M, N)$$

folgen. Andererseits folgt aber aus den beiden ersten Relationen unmittelbar nach § 4, I

$$(M', N') \sim (M, N)$$

und damit ergibt sich ein Widerspruch. Damit ist der Beweis bereits geliefert.

Freilich beruht der Beweis auf einer gewissen Voraussetzung, die noch

zu erörtern ist. Wir operieren mit der Verbindungsmenge von M und N und haben deshalb die Voraussetzung nötig, daß M und N fremde Mengen sind. Sind sie es nicht, so wird man am einfachsten so vorgehen, daß man folgendes neue Axiom zugrunde legt [13]):

I. *Sind M und N keine fremden Mengen, so gibt es stets zwei ihnen äquivalente, zueinander fremde Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$; so daß also*

$$\mathfrak{M} \sim M \quad \textit{und} \quad \mathfrak{N} \sim N, \quad \textit{und} \quad \mathfrak{M} f \mathfrak{N}.$$

Gemäß § 3, 12 besteht auch für sie die Beziehung

$$\mathfrak{M} a \mathfrak{N},$$

und auf sie läßt sich daher der obige Beweis übertragen. Aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ folgt dann auch $M \sim N$.

Es handelt sich nun noch um den gleichen Nachweis für die Beziehung $M d N$. Ehe ich dazu übergehe, erinnere ich daran, daß die Eigenart der Beziehung $M d N$ in der Cantorschen Theorie offen geblieben war; für das durch sie bedingte Verhältnis von M zu N hatte sich ein Resultat nicht ableiten lassen. Das darf nicht wundernehmen; das hierin enthaltene Problem stellt nämlich wieder ein *logisch unlösbares* Problem, und damit eine illusorische Aufgabe dar. Wir haben ja als Prämissen zunächst nur die Aussagen

$$\textit{kein } M_1 \sim N, \quad \textit{kein } N_1 \sim M.$$

Dazu kommen, da M und N endliche Mengen sind,

$$\textit{kein } M_1 \sim M, \quad \textit{kein } N_1 \sim N,$$

also lauter Aussagen von negativem Charakter. Selbst der Weg des indirekten Beweises ändert daran in diesem Fall nichts; denn man müßte noch die Annahme

$$M \textit{ nicht } \sim N$$

hinzufügen. Nun wäre es ja möglich, daß die für den Beweis einzig in Frage kommenden Axiome II und III der Nichtäquivalenz von § 4 die Prämissen positiv beeinflussen könnten; aber auch das ist nicht der Fall. Denn diese Axiome lauten ja in ihrem Schlußteil übereinstimmend

$$(M_1, N_1) \textit{ nicht } \sim (M, N).$$

Wir müssen also von Prämissen ausgehen, die *samt und sonders* negativ sind, und kommen zu dem Schluß, daß sich die Äquivalenz $M \sim N$ im Fall endlicher Menge ohne eine nochmalige neue axiomatische Fest-

---

[13]) Es entspricht dem von Zermelo in seinen Grundlagen (Math. Ann. 65) enthaltenen Theorem 19. Man könnte auch die größte gemeinsame Teilmenge von M und N axiomatisch einführen und mit ihr operieren; doch scheint dies weniger einfach.

setzung nicht folgern läßt. Das so gewonnene Resultat läßt sich auch in seiner allgemeinen Bedeutung leicht verstehen. Es läuft dem Tatbestand parallel, der uns aus der allgemeinen Theorie der endlichen Zahlgrößen geläufig ist. Dort muß die Festsetzung, *wann* zwei Größen als gleich gelten sollen, erst frei — natürlich zweckmäßig — geformt werden, ehe man die Frage, *ob* zwei gegebene Größen als gleich zu gelten haben, in Betracht ziehen kann. Man denke z. B. an die Weierstraßsche Theorie der Irrationalzahlen; sie setzt bekanntlich die Gleichheit zweier Zahlen a und b so fest, daß jeder Bestandteil von a kleiner ist als b und jeder Bestandteil von b kleiner als a. Eine solche axiomatische Festsetzung erweist sich also auch im Gebiet der endlichen Mengen, wenn man sie, wie hier, ausschließlich auf die Mengenbeziehungen, d. h. auf die Nichtäquivalenz von Menge und Teilmenge gründet, als eine Notwendigkeit.

Es fragt sich nur, welche Festsetzung man zweckmäßig zugrunde legt. Beachtet man, daß es sich im Grunde um eine Axiomatik der Größenlehre handelt, so liegt offenbar nichts näher, als die eben genannte Definition zu benutzen, und dies soll in der Tat geschehen. Wir setzen also fest (*Axiom der Äquivalenz endlicher Mengen*):

II. *Zwei endliche Mengen M und N sind äquivalent, wenn für jede Teilmenge M' und N' die Beziehung $M'bN$ resp. $N'bM$ besteht*; d. h. *aus MdM, NdN, $M'bN$, $N'bM$ für jedes M', N' folgt $M \sim N$.*

Hieraus läßt sich der Satz, daß aus MdN auch $M \sim N$ folgt, unmittelbar folgern. Ehe wir dazu übergehen, wollen wir noch die Berechtigung unseres Axioms und seine Stellung im gesamten Aufbau näher erörtern. Wir wollen zunächst nachweisen, daß von den vier Beziehungen

$$MaN, \quad MbN, \quad McN, \quad MdN$$

nur die letzte mit dem Axiom verträglich ist.

Aus MaN folgt

$$\text{ein } M' \sim N;$$

gemäß unserm Axiom ist aber für jedes M'

$$M'bN,$$

und man erhielte also NbN, was aber nach § 3, 3 widerspruchsvoll ist.

Aus MbN folgt

$$\text{ein } N' \sim M;$$

was analog zur Relation MbM führt, die ebenfalls widerspruchsvoll ist.

Endlich folgt aus McN genau wie eben die widerspruchsvolle Relation NbN.

Unser Axiom kann also in der Tat nur mit der Beziehung MdN

verträglich sein. Dies ist aber auch wirklich der Fall. Die Folgerungen, die sich aus

$$M'bN \text{ und } MdN, \quad \text{aus } N'bM \text{ und } MdN$$

ergeben, lauten gemäß § 3, 9, daß für *jedes* M' und N'

$$M'bM \text{ und } N'bN$$

ist; sie entsprechen der Endlichkeit von M und N und stellen die in § 4, 4 gefundene Eigenschaft der endlichen Mengen dar.

Zusammenfassend folgt also: Das Axiom II ist nur für endliche Mengen realisiert, und überdies weder im Fall MbN, noch McN; damit ist aber der Beweis seiner Berechtigung geliefert. *Es ist für die endlichen Mengen und ihre Äquivalenz charakteristisch.*

Der Beweis des Äquivalenzsatzes ergibt sich nun folgendermaßen.

Gemäß § 4, Satz 4 ist für jedes M' und N'

$$M'bM \text{ und } N'bN;$$

ferner gilt nach Voraussetzung

$$MdN \text{ und } NdM,$$

und hieraus folgt nach § 3, 9 sofort

$$M'bN \text{ und } N'bM$$

und nunmehr nach unserm Axiom

$$M \sim N.$$

§ 6.
Sätze über Verbindungsmengen.

Seien M und N einerseits, und $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ andrerseits fremde Mengen. Zwischen M und $\mathfrak{M}$, sowie zwischen N und $\mathfrak{N}$ bestehe je eine der Beziehungen

$$Ma\mathfrak{M}, \quad Mb\mathfrak{M}, \quad Mc\mathfrak{M}, \quad Md\mathfrak{M}$$

und

$$Na\mathfrak{N}, \quad Nb\mathfrak{N}, \quad Nc\mathfrak{N}, \quad Nd\mathfrak{N}.$$

Es ist die Frage, welche Beziehung für

$$(M, N) \text{ und } (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

resultiert, wenn wir irgendeine Beziehung der ersten Zeile mit einer Beziehung der zweiten Zeile kombinieren.

Wir beweisen zunächst folgende Sätze:

1. Aus $Ma\mathfrak{M}$ und $Na\mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
2. Aus $Mb\mathfrak{M}$ und $Nb\mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
3. Aus $Mc\mathfrak{M}$ und $Nc\mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, c\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
4. Aus $Md\mathfrak{M}$ und $Nd\mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, d\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
5. Aus $Ma\mathfrak{M}$ und $Nd\mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Die Beweise von Satz 1, 4, 5 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Die Voraussetzungen lauten gemeinsam

$$M \sim \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad N \sim \mathfrak{N},$$

woraus gemäß Axiom I von § 4

$$(M, N) \sim (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

folgt. Im Fall 1 und 5 sind nun M und $\mathfrak{M}$ nach § 4, Satz 3 unendliche Mengen, also gilt dies nach § 4, 8 auch von (M, N) und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und daher ergibt sich wieder

$$(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Im Fall 4 sind dagegen M, N, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ endliche Mengen, also auch (§ 4, 12) (M, N) und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und daher ist

$$(M, N)\, d\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Wir beweisen nun den Satz 2[14]). Dazu gehen wir von den Relationen

$$M\, b\, \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad N\, b\, \mathfrak{N}$$

aus, also von den Beziehungen

$$\text{kein } M_1 \sim \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{M}' \sim M,$$
$$\text{kein } N_1 \sim \mathfrak{N} \qquad \mathfrak{N}' \sim N,$$

und erhalten zunächst

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}') \sim (M, N).$$

Wir folgern nun aus den gegebenen Relationen $M\, b\, \mathfrak{M}$ und $N\, b\, \mathfrak{N}$ mittels $M \sim \mathfrak{M}'$ und $N \sim \mathfrak{N}'$ weiter

$$\mathfrak{M}'\, b\, \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}'\, b\, \mathfrak{N},$$

oder aber (§ 5, 2)

$$\mathfrak{M}' \textit{ nicht} \sim \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{N}' \textit{ nicht} \sim \mathfrak{N}$$

und daraus endlich, gemäß Satz 6 von § 5

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

oder

$$(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

---

[14]) Geht man zu Mächtigkeiten über, so bezieht sich der obige Satz auf den Fall, daß

$$\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{n}_2$$

ist; er schließt daraus

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{n}_2.$$

In der allgemeinen Theorie fehlt noch heute ein Nachweis dieser Folgerung. Sie ist von F. Bernstein unter der Annahme bewiesen worden, daß $\mathfrak{m}_2$ mit $\mathfrak{n}_1$ „vergleichbar“ ist. (Math. Ann. 61 (1905), S. 129.) Nun scheidet zwar in dem vorliegenden Aufbau die Vergleichbarkeit als offene Frage gemäß § 3 aus, der Bernsteinsche Beweis stützt sich aber außerdem auf den Äquivalenzsatz. Der obige Beweis stützt sich dagegen auf das Axiom II von § 4, das ja auch den Bernsteinschen Äquivalenzsatz zur Folge hat.

In derselben Weise beweist man den Satz 3. Ein letzter Satz, der sich ableiten läßt, lautet:

6. Ist M eine endliche Menge, so folgt aus $M b \mathfrak{M}$ und $N d \mathfrak{N}$

$$(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Wegen $M b \mathfrak{M}$ hat man nämlich

$$M \sim \mathfrak{M}',$$

wo mit M auch $\mathfrak{M}'$ eine endliche Menge ist. Hieraus und aus $N \sim \mathfrak{N}$ folgt weiter

$$(M, N) \sim (\mathfrak{M}' \mathfrak{N}).$$

Wir unterscheiden nun, ob $\mathfrak{M}$ eine endliche oder unendliche Menge ist. Im ersten Fall sind $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ endliche Mengen, ferner ist $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})$ Teilmenge von $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und daher ist gemäß § 4, 4

$$(\mathfrak{M}' \mathfrak{N})\, b\, (\mathfrak{M} \mathfrak{N}).$$

Ist aber $\mathfrak{M}$ eine unendliche Menge, so ist $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ nach § 4, 8 ebenfalls eine unendliche Menge; dagegen ist $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})$ nach § 4, 12 endlich und daher gilt ebenfalls (§ 4, 7)

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Wegen $\mathfrak{M}' \sim M$, $\mathfrak{N} \sim N$ folgt daraus weiter

$$(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

In den anderen Fällen lassen sich eindeutige Folgerungen nicht entnehmen. Nur soviel sei bemerkt, daß mit den Relationen

$$M a \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad N b \mathfrak{N}$$

jede der beiden Beziehungen

$$(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \quad \text{und} \quad (M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

verträglich ist.

§ 7.

Schlußbetrachtung.

Die vorstehende Untersuchung liefert jedenfalls ein *hinreichendes* Axiomensystem für die Sätze, die die Äquivalenzprobleme der Mengen betreffen. Wird für den Augenblick noch die Bezeichnung $M e N$ für die Äquivalenz von M und N eingeführt, so handelt es sich, genauer gesprochen, um die Kombination der Beziehungen, die durch

$$MaN,\ MbN,\ McN,\ MdN,\ MeN,\ MfN,\ MtN,\ (M, N)$$

dargestellt sind, und um die Art, wie sie assoziativ einander bedingen und

sich miteinander verbinden. Ob die aufgestellten Axiome sämtlich notwendig sind oder auch entbehrliche Bestandteile enthalten, mag offen bleiben. Abgesehen von den Axiomen mehr formaler Bedeutung, wie die über MeN, MfN, MtN sind es wesentlich die folgenden, die die materiellen Stützen des Aufbaues darstellen: Das Axiom der *Verknüpfung*, die Axiome über die *Äquivalenz der Teilmengen* und der *Verbindungsmengen*, die Axiome über die *Nichtäquivalenz* der Verbindungsmengen *nicht äquivalenter Mengen* und das Axiom über die *Äquivalenz endlicher Mengen*. Die Charakterisierung, die in diesen Bezeichnungen enthalten ist, zeigt schon die Verschiedenheit der Gebiete, denen sie angehören, und zeigt auch ihre allgemeine Notwendigkeit für den Aufbau.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist die vorstehende Betrachtung zugleich eine Axiomatik der Größenlehre; in der Tat ist ja von den Elementen der Menge nirgends die Rede. Dies ist auch die Tatsache, die dem in § 3 gefundenen Resultat seine Stellung im axiomatischen Aufbau anweist. Wir fanden dort, daß mit den Beziehungen MdN und NdP auch die Folgerung MaP verträglich ist. Sie könnte deshalb an sich ebenfalls als axiomatische Festsetzung an Stelle des Axioms II eingeführt werden. Wie wir sahen, bewirkt sie als weitere Folgerung, daß aus MaP und PdN sich MdN ergibt, und liefert ebenfalls ein in sich widerspruchsfreies System von Beziehungen. Es ließ sich durch die Formeln

$$(aa) = (dd) = a; \quad (ad) = (da) = d$$

darstellen.

Dies wollen wir nun deuten. Zunächst ist zu beachten, daß in die vorstehenden Schlüsse die Beziehungen MbN und McN nicht eingehen. daß es sich bei ihnen vielmehr nur um MaN und MdN und deren Kombinationen handelt. Nur auf sie beziehen sich also die obigen Regeln, und auf sie beschränke ich mich zunächst. Die Aufgabe ist dann, Objekte mit Größencharakter zu finden, die sich diesen Regeln fügen. Die in § 3 erwähnte Analogie mit den Vorzeichenregeln macht dies leicht. Man erreicht es, indem man *entgegengesetzte Größen* in Betracht zieht, deren Teile zum Ganzen in der durch (a) festgelegten Beziehung stehen, also der Dedekindschen Definition genügen; die Beziehung MaN gilt dann für gleichartige, dagegen MdN für entgegengesetzte Objekte. Einseitig begrenzte Geraden von unendlicher Länge aber entgegengesetzter Richtung bilden ein einfaches Beispiel, falls man als Teilmenge jeden ebenfalls unendlichen Bestandteil betrachtet und die Äquivalenz z. B. durch eineindeutige Ähnlichkeitsabbildung definiert. Für je zwei von ihnen besteht dann entweder die Relation (a) oder (d).

Man kann leicht erreichen, daß auch die Beziehungen (b) und (c) auftreten. Dies geschieht so, daß man auch *Paare* entgegengesetzt gerich-

teter Geraden als Objekte zuläßt. Für je zwei solche Paare besteht dann die Beziehung (a), für jedes Paar und eine einzelne Gerade die Beziehung (b) oder (c), und für je zwei einzelne Geraden die Beziehung (a) oder (d). Die Gesetze

$$(aa) = (dd) = a, \quad (ad) = (da) = d$$

bleiben offenbar bestehen. Beziehungen (bb), (bd), (dc) und (cc) sind unmöglich. Dagegen gibt es hier eine Regel für (bc); es kann sowohl (a) wie (d) resultieren. Endlich ergeben die Beziehungen

$$(ab)\ (ba)\ (db), \quad (ac)\ (ca)\ (cd)$$

(b) oder (c) als Resultat.

Die Tatsache, daß die Cantorsche Theorie die Unvereinbarkeit der Annahme, M und N seien unendliche Mengen, mit der Beziehung MdN des § 3 nicht nachzuweisen vermochte, erfährt hierdurch neues Licht. Denn die Zulassung von Elementen von zweierlei Art, die einander entgegengesetzt sind, streitet weder gegen den Mengenbegriff als solchen, noch auch gegen die Dedekindsche Definition der unendlichen Mengen und die auf ihr ruhenden Eigenschaften. Für den so erweiterten Mengenbegriff kann aber, wie wir sahen, im Fall unendlicher Mengen auch die Beziehung MdN realisiert sein. Wie weit sich auf solche Mengen die weiteren Begriffe und Sätze der Cantorschen Theorie übertragen lassen, mag an dieser Stelle auf sich beruhen bleiben[16]).

Nur das sei noch erwähnt, daß die allgemeine Weiterführung der bisher gefundenen Resultate in erster Linie die Beziehung der Menge zu ihren Elementen, ferner den Ordnungsbegriff usw. ins Auge zu fassen hat. Ich will noch kurz zeigen, wie man die Elemente der Menge auf der hier vorhandenen Grundlage einführen kann. Voranzustellen ist das folgende Axiom:

1. *Jede Menge enthält Teilmengen, die nicht mehr selbst in Teilmengen zerlegbar sind*; sie heißen unzerlegbare Teilmengen oder *Elemente*. Sie sollen durch

$$mTM \quad \text{oder kürzer durch } m$$

bezeichnet werden. Von ihnen gilt der Satz:

Ist $M \sim N$, so kann eine nicht zerlegbare Teilmenge von M keiner zerlegbaren Teilmenge von N äquivalent sein und umgekehrt.

Aus der Äquivalenz $M \sim N$ folgt nämlich nach Axiom I von § 3 zu jedem M' die Existenz einer Teilmenge N' von N, so daß

$$M' \sim N'$$

---

[16]) Herr A. Fränkel hat mich darauf hingewiesen, daß nicht einmal alle Axiome über Teilmengen gelten. Axiom I bleibt bestehen, Axiom II nicht; es gilt auch Axiom III von § 3.

ist. Würde nun $m = M'$ ein zerlegbares N' bedingen und wäre N'' eine Teilmenge von N', so folgt aus $M' \sim N'$ gemäß demselben Axiom, daß N'' die Existenz einer Teilmenge von m bedingt, die zu N'' äquivalent ist; was aber einen Widerspruch darstellt.

Von diesem Tatbestand kann man nun wieder verlangen, daß er auch umgekehrt gilt; d. h. man kann fordern:

II. *Zwei Mengen M und N sind äquivalent, wenn jedem Element von M ein Element von N zugehört und umgekehrt.*

Daß diese Forderung an sich widerspruchsfrei ist, wurde eben gezeigt; daß sie auch den allgemeinen Axiomen genügt, die die Äquivalenzbeziehung regeln (§ 1, I und II, § 3, I, § 4, I), ist leicht zu sehen. Damit möge diese Betrachtung ihren Abschluß finden. Auf die Frage, wie mit der Einführung der Elemente und der neuen Äquivalenzbeziehung sich der axiomatische Aufbau ändern würde, soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Jedenfalls entspricht die vorstehende Untersuchung den Forderungen, die im Anfang gestellt wurden. Sie sieht von allen Wortdefinitionen ab und benutzt ausschließlich *Beziehungen* zwischen den Objekten, von denen sie handelt. Die Axiome liefern die Grundregeln für das Operieren mit ihnen. Gerade um dies deutlich hervortreten zu lassen, ist jedem Axiom und jedem Satz die ihm entsprechende formale Ausdrucksweise, also die Bindung, die die bezüglichen Beziehungen durch den Satz oder das Axiom erfahren, gegeben worden. Auch sind die einzelnen Axiome immer erst dann eingeführt worden, wenn sie für den Fortgang der Beweise nötig waren.

(Eingegangen am 14. 12. 1920.)

Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?[1])

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

§ 1.

Existenzbereich der unendlichen Dezimalbruchentwicklung auf dem Kontinuum.

Verstehen wir in der Menge der endlichen Dualbrüche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ unter einem Intervalle λ_ν ein zwei Dualbrüche $\frac{a}{2^\nu}$ und $\frac{a+2}{2^\nu}$ als Endelemente besitzendes geschlossenes Intervall, unter einem *Punkte des Kontinuums* eine in unbegrenzter Fortsetzung begriffene Folge von Intervallen λ, deren jedes im Innern des nächstvorangehenden enthalten ist[2]), unter x einen variablen Punkt des Kontinuums, unter $F_n(x)$ einen n-stelligen Dezimalbruch mit der Eigenschaft, daß jeder links von ihm liegende Punkt des Kontinuums links von einem Intervalle von x liegt, während $F_n(x) + 10^{-n}$ rechts von einem Intervalle von x liegt, unter $F(x)$ die eindeutige unendliche Dezimalbruchentwicklung von x, so besitzt $F_n(x)$ die (übrigens allen unstetigen Funktionen gemeinsame) Eigenschaft,

---

[1]) Über den Inhalt dieser (in gleichlautender Form der Amsterdamer Akademie am 18. Dezember 1920 vorzulegenden) Abhandlung wurde am 22. September 1920 auf der Naturforscherversammlung in Bad Nauheim ein referierender Vortrag gehalten.

[2]) Vgl. meine in Bd. 12 der Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie) erschienene Abhandlung: „*Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*", 2. Teil, S. 3, 4. Wie daselbst S. 4 Fußnote [1]) hervorgehoben und durch die vorliegende Arbeit klar ins Licht gestellt wird, sind die beiden S. 9 des 1. Teiles benutzten Begriffe der „reellen Zahl" bedeutend enger als der hier definierte Begriff des Punktes des Kontinuums. In einem ganz andern, aus dem Zusammenhang ersichtlichen Sinne wird der Ausdruck „reelle Zahl" der Expressivität wegen in der Überschrift und im Schlußparagraphen der vorliegenden Arbeit gebraucht.

daß ihr Existenzbereich G_n *nicht* mit dem Kontinuum zusammenfallen[3]) kann. Der Existenzbereich $G = \mathfrak{D}\,(G_1, G_2, \ldots)$ von $F(x)$ kann also erst recht nicht mit dem Kontinuum zusammenfallen, obgleich er sich (ebenso wie der Existenzbereich der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von x) dem Kontinuum so eng anschmiegt, daß er mit demselben einerseits örtlich übereinstimmt[4]), andererseits inhaltsgleich[5]) ist[6]).

Die Definition des Punktes des Kontinuums erleidet indessen eine erhebliche Einschränkung, wenn wir in derselben statt „in unbegrenzter Fortsetzung begriffene Folge", „Fundamentalreihe"[7]) lesen. Zweck der folgenden Paragraphen ist, klarzustellen, inwiefern für diese *Punkte des Kontinuums im engern Sinne*, die unendliche Dezimalbruchentwicklung existiert.

§ 2.

Die Ergänzungselemente der abzählbar unendlichen, überall dicht geordneten Mengen.

Es sei eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete[8]) Menge H gegeben. Es seien $g_1, g_2, g_3, \ldots$ die nach irgend einem, H als abzählbar unendliche Menge charakterisierenden, Abzählungsgesetze γ numerierten Elemente von H und es sei $\mathfrak{S}(g_1, g_2, \ldots, g_\nu) = s_\nu$ gesetzt. Unter einem i_ν bzw. j_ν verstehen wir ein (eventuell aus einem einzigen Elemente bestehendes) geschlossenes Intervall[9]) von H, dessen Endelemente zu s_ν gehören, dessen Inneres aber höchstens ein bzw. kein einziges Element von s_ν enthält.

Unter einem *Ausfüllungselemente* r von H verstehen wir *erstens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $f_\alpha, f_{\alpha+1}, f_{\alpha+2}, \ldots$ (α eine für r bestimmte positive ganze Zahl), wo jedes f_ν ein i_ν und jedes $f_{\alpha+\nu+1}$ in $f_{\alpha+\nu}$ enthalten ist, während f_ν für jedes ν zu einer für r bestimmten Spezies S_ν

---

[3]) A. a. O., 2. Teil, S. 5.

[4]) A. a. O., 2. Teil, S. 6.

[5]) A. a. O., 2. Teil, S. 29, 30.

[6]) Natürlich kann auch der Existenzbereich einer mittels einer Funktion der unendlichen Dezimalbruchentwicklung von x erklärten Funktion von x nicht über G hinausgehen. Z. B. hat die im Jahresber. d. D. M.-V. **23**, S. *80* von mir definierte Funktion $f(x)$ genau G zum Existenzbereich. Während aber die Funktion $F(x)$ des Textes in der auf dem Kontinuum überall dichten Punktmenge G *gleichmäßig stetig* ist und sich *auf Grund dieser Eigenschaft* zu einer *auf dem vollen Kontinuum existierenden* Funktion $\varphi(x) = x$ erweitern läßt, ist für $f(x)$ jede Erweiterung auf das volle Kontinuum ausgeschlossen.

[7]) Vgl. „*Begründung der Mengenlehre usw.*", 1. Teil, S. 14.

[8]) A. a. O., 1. Teil, S. 16.

[9]) A. a. O., 1. Teil, S. 13.

gehört, von der je zwei Elemente ein Element von s_ν gemeinsam haben; *zweitens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ von je ein bestimmbares Element besitzenden abtrennbaren Teilmengen[10]) von H, wenn in jeder Folge jedes $\mathfrak{z}_{\nu+1}$ in $\mathfrak{z}_\nu$ enthalten ist und eine Fundamentalreihe $n_1, n_2, n_3, \ldots$ $(n_{\nu+1} \geqq n_\nu)$ von ganzen positiven Zahlen und ein Ausfüllungselement erster Art r_0 von H bestimmt sind mit der Eigenschaft, daß zu jedem Elemente $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ von r ein Element $f_a, f_{a+1}, f_{a+2}, \ldots$ von r_0 existiert, so daß $\mathfrak{z}_{n_\nu}$ zu $f_{a+\nu}$ gehört.

Unter einem *Ergänzungselemente nullter Ordnung* oder kurz einem *Ergänzungselemente* r von H verstehen wir *erstens* eine Fundamentalreihe $f_a, f_{a+1}, f_{a+2}, \ldots$ (a eine für r bestimmte positive ganze Zahl), wo jedes f_ν ein i_ν und jedes $f_{a+\nu+1}$ in $f_{a+\nu}$ enthalten ist; *zweitens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$ von je ein bestimmbares Element besitzenden abtrennbaren Teilmengen von H, wenn in jeder Folge jedes $\mathfrak{z}_{\nu+1}$ in $\mathfrak{z}_\nu$ enthalten ist und eine Fundamentalreihe $n_1, n_2, n_3, \ldots$ $(n_{\nu+1} \geqq n_\nu)$ von ganzen positiven Zahlen und ein Ergänzungselement erster Art $f_a, f_{a+1}, f_{a+2}, \ldots$ von H bestimmt sind, so daß jedes $\mathfrak{z}_{n_\nu}$ von r zu $f_{a+\nu}$ gehört[11]).

Wenn ${}_1r$ und ${}_2r$ Ausfüllungselemente von H sind und jedes ${}_1f_\mu$ mit jedem ${}_2f_\nu$ ein gemeinsames Element besitzt, so sagen wir, daß ${}_1r$ und ${}_2r$ *in H zusammenfallen.* Ein mit einem Ergänzungselemente von H in H zusammenfallendes Ausfüllungselement von H *wird gleichfalls als Ergänzungselement von H bezeichnet.*

Wenn das Element g von H zu jedem f_ν des Ausfüllungselementes r von H gehört, so sagen wir, daß r und g in H *zusammenfallen.*

Wenn ${}_1r$ und ${}_2r$ Ausfüllungselemente von H sind und man ein ${}_1f_\mu$ und ein ${}_2f_\nu$ ohne gemeinsame Elemente angeben kann, so sagen wir, daß ${}_1r$ und ${}_2r$ *in H örtlich verschieden sind.*

Wenn man ein f_ν des Ausfüllungselementes r von H angeben kann, zu dem das Element g von H nicht gehört, so sagen wir, daß r und g *in H örtlich verschieden sind.*

Das Ergänzungselement bzw. Ausfüllungselement r von H heißt ein *Ergänzungselement erster Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g \geqq r$ (d. h. jedes rechts von g gelegene Element von H liegt rechts von einem bestimmbaren f_ν von r), oder die

[10]) A. a. O., 1. Teil, S. 4.

[11]) Ob der Begriff des Ausfüllungselementes sich auf den des Ergänzungselementes zurückführen läßt, bleibt hier dahingestellt.

Relation $g \leqq r$ (d. h. jedes links von g gelegene Element von H liegt links von einem bestimmbaren f_ν von r) hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r mit einem Ergänzungselemente r' von H, von dem jedes f'_ν ein j_ν ist, zusammenfällt.

Die Ergänzungselemente erster Ordnung von H entsprechen den *Dedekindschen Schnitten* von H.

Das Ergänzungselement erster Ordnung r von H heißt ein *Ergänzungselement zweiter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H die Relation $g \leqq r$ entweder hergeleitet, oder ad absurdum geführt werden kann, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn r' sich so wählen läßt, daß kein μ mit der Eigenschaft, daß die rechten Endelemente von f'_ν und f'_μ für jedes $\nu > \mu$ identisch sind, existieren kann.

Das Ergänzungselement zweiter Ordnung r von H heißt ein *Ergänzungselement dritter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g > r$ (d. h. man kann ein links von g gelegenes f_ν von r bestimmen), oder die Relation $g \leqq r$ hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen läßt, daß zu jedem f'_μ ein solches f'_ν bestimmt werden kann, dessen rechtes Endelement links vom rechten Endelemente von f'_μ gelegen ist.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H heißt ein *Ergänzungselement vierter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g > r$, oder die Relation $g = r$ (d. h. g und r fallen in H zusammen), oder schließlich $g < r$ (d. h. man kann ein rechts von g gelegenes f_ν von r bestimmen) hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen läßt, daß zu jedem f'_μ ein solches $\nu > \mu$ bestimmt werden kann, daß die beiden Endelemente von f'_ν von den beiden Endelementen von f'_μ verschieden sind.

Die vorstehenden Definitionen der Ausfüllungselemente sowie der Ergänzungselemente nullter, erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung von H sind für gegebene ordnende Relationen in H offenbar unabhängig vom Abzählungsgesetze γ.

Sei M eine endliche Menge oder eine Fundamentalreihe von Ergänzungselementen vierter Ordnung von H_ν, deren je zwei in H_ν örtlich verschieden sind und deren jedes von jedem Elemente von H_ν in H_ν örtlich verschieden ist. Die Vereinigung von M und H_ν bildet eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete Menge $H_{\nu+1}$. Jedes Ergänzungselement von H_ν ist gleichzeitig Ergänzungselement von $H_{\nu+1}$ und jedes Ergänzungselement h-ter Ordnung von $H_{\nu+1}$ fällt in $H_{\nu+1}$ zusammen mit einem Ergänzungselemente h-ter Ordnung von H_ν.

Die vorstehende Beziehung besteht sowohl zwischen der geordneten

Menge der endlichen Dualbrüche H_0 und der geordneten Menge der endlichen Dezimalbrüche H_1, wie zwischen H_1 und der geordneten Menge der rationalen Zahlen H_2.

§ 3.

Ergänzungselemente, Dezimalbruchentwicklungen und Kettenbruchentwicklungen.

Ein Ergänzungselement erster Ordnung von H läßt in H die *Ortsbestimmung erster Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der endlichen Dezimalbrüche gelesen wird, als die *mehrdeutige unendliche Dezimalbruchentwicklung* herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung erster Ordnung zuläßt, ein Ergänzungselement erster Ordnung von H.

Die Ortsbestimmung erster Ordnung in H kann für in H zusammenfallende Ergänzungselemente von H verschieden ausfallen.

Ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H läßt in H die *Ortsbestimmung zweiter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der endlichen Dezimalbrüche gelesen wird, als die *eindeutige unendliche Dezimalbruchentwicklung* (für welche die Existenz einer letzten von 9 verschiedenen Ziffer ausgeschlossen ist) herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung zweiter Ordnung zuläßt, ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung zweiter Ordnung in H verschieden ausfällt, können in H nicht zusammenfallen.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H läßt in H die *Ortsbestimmung dritter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der rationalen Zahlen gelesen wird, als die *unendliche reduziert-regelmäßige Kettenbruchentwicklung* herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung dritter Ordnung zuläßt, ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung dritter Ordnung in H verschieden ausfällt, sind in H örtlich verschieden.

Ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H läßt in H die *Ortsbestimmung vierter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der rationalen Zahlen gelesen wird, als die *eindeutige regelmäßige Kettenbruchentwicklung* (welche eventuell endlich ausfallen kann) herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung vierter Ordnung zuläßt, ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung vierter Ordnung in H verschieden ausfällt, sind in H örtlich verschieden.

§ 4.

Existenz der Dezimalbruchentwicklung reeller algebraischer Zahlen.

Seien r_1 und r_2 beliebige reelle algebraische Zahlen, d. h. je einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten genügende Ausfüllungselemente der von den rationalen Zahlen gebildeten geordneten Menge H_2. Alsdann kann man eine algebraische Gleichung

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante D bestimmen, der sowohl r_1 wie r_2 genügt. Seien $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die (mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximierbaren) Wurzeln von $F(x) = 0$, so können w_r und w_s für $r \neq s$ nicht in H_2 zusammenfallen. Sei ϱ eine rationale Zahl, welche die Moduln aller Wurzeln von $F(x) = 0$ übersteigt, und $b = 2\varrho$, so ist

$$|w_r - w_s| < b(r \neq s).$$

Weil aber

$$\prod_{\mu \neq \nu} (w_\mu - w_\nu)^2 = \frac{D}{a_0^{2n-2}},$$

so ist andererseits

$$|w_r - w_s|^2 > \frac{D}{a_0^{2n-2} b^{n^2-n-2}},$$

so daß wir mittels hinreichend genauer Approximierung von r_1 und r_2 entweder Sicherheit erlangen, daß r_1 und r_2 mit derselben Wurzel w_a zusammenfallen, oder ein r_1 und r_2 trennendes rationales Intervall bestimmen können. Indem wir dieses Resultat zunächst spezialisieren für den Fall, daß r_2 eine rationale Zahl ist, ersehen wir mühelos, daß r_1 in H_2 entweder mit einem Elemente von H_2 zusammenfällt oder von jedem Elemente von H_2 örtlich verschieden ist[12]), so daß r_1 *sich als Ergänzungselement vierter Ordnung von* H_2 erweist, mithin *sowohl in einen eindeutigen unendlichen Dezimalbruch, wie in einen eindeutigen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt werden kann.*

Setzen wir nunmehr voraus, daß weder r_1 noch r_2 mit einem Elemente von H_2 zusammenfällt, so *fallen sie entweder in* H_2 *zusammen, oder sind in* H_2 *örtlich verschieden.*

Hieraus ergibt sich, daß die Spezies der reellen algebraischen Zahlen eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete Menge H_3 bildet, welche zu H_2 die am Schluß von § 2 erklärte Beziehung eines $H_{\nu+1}$ zu einem entsprechenden H_ν besitzt.

---

[12]) Diese Eigenschaft läßt sich aus etwas weniger elementaren bekannten Tatsachen bedeutend direkter folgern, bedarf aber jedenfalls eines ausdrücklichen Beweises.

§ 5.

Existenz der Dezimalbruchentwicklung von π.

Seien a und b ganze positive Zahlen und $a < b$. Wir verstehen unter K_0 den unbedingt konvergenten[13]) unendlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{a}{b}, \quad -\frac{a^2}{(2\nu+1)b}\right]_1^\infty$$

und unter K_m den unbedingt konvergenten unendlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{a^2}{(2m+1)b}, \quad -\frac{a^2}{(2\nu+1)b}\right]_{m+1}^\infty.$$

Alsdann gelten die Beziehungen

$$\operatorname{tg}\frac{a}{b} = K_0 = \frac{a}{b-K_1},$$

$$K_m = \frac{a^2}{(2m+1)b - K_{m+1}} \quad (m \geqq 1).$$

Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ reelle Variabele, welche durch die Beziehungen

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{b-x_1}, \\ x_m = \dfrac{a^2}{(2m+1)b - x_{m+1}} \quad (m \geqq 1) \end{cases}$$

verbunden sind, und x'_a eine rationale Zahl zwischen 0 und 1, also $< \frac{1}{2} b$. Mittels (†) leiten wir aus x'_a weitere rationale Zahlen $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots, x'_1, x'_0$, und $x'_{a+1}, x'_{a+2}, \ldots$ her. Von diesen fallen $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots, x'_1, x'_0$ alle positiv aus, während $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots, x'_1$ alle $< \frac{1}{2} b$ und $x'_0 < \frac{2a}{b}$ wird. Weiter kann man ein kleinstes $r > a$ bestimmen mit der Eigenschaft, daß $x'_r \leqq 0$ oder $\geqq 1$ wird[14]).

Sei α eine (für das weitere hinreichend klein gewählte) positive rationale Zahl und η_a ein solches geschlossenes rationales Wertintervall von x_a, daß sowohl η_a, wie die auf Grund von (†) entsprechenden Wertintervalle $\eta_{a+1}, \eta_{a+2}, \ldots, \eta_r$ von $x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_r$ rechts vom Werte 0 und links vom Werte 1 liegen, während, wenn wir noch die auf Grund von (†) entsprechenden Wertintervalle von $x_{a-1}, x_{a-2}, \ldots, x_0$ mit $\eta_{a-1}, \eta_{a-2}, \ldots, \eta_0$ bezeichnen, jedes K_ν für $0 \leqq \nu \leqq r$ in η_ν enthalten ist und eine Entfernung $> 2\alpha$ von den Endwerten von η_ν besitzt. Alsdann können wir eine solche ganze nichtnegative Zahl $s \leqq r$ bestimmen, daß $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{s-1}$ der Reihe nach in $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{s-1}$ enthalten sind, während x'_s eine Entfernung $> \alpha$ von K_s besitzt.

13) Vgl. Pringsheim, Münchener Berichte 28 (1898), S. 299 ff.

14) A. a. O., S. 318.

Sei β' eine solche positive rationale Zahl, daß für jedes zu η_0 gehörige x_0 die Ungleichung

$$\frac{dx_0}{dx_t} > \beta'$$

gilt, so besitzt x_0' eine Entfernung $> \alpha\beta'$ von K_0.

Sei x_0'' eine solche rationale Zahl, daß die auf Grund von (†) entsprechende Zahl $x_a'' \leqq 0$ oder $\geqq 1$ ausfällt. Alsdann können wir eine solche ganze nichtnegative Zahl $t \leqq a$ bestimmen, daß $x_0'', \ldots, x_{t-1}''$ der Reihe nach in $\eta_0, \ldots, \eta_{t-1}$ enthalten sind, während x_t'' eine Entfernung $> \alpha$ von K_t besitzt.

Sei β'' eine solche positive rationale Zahl, daß für jedes zu η_0 gehörige x_0 die Ungleichung

$$\frac{dx_0}{dx_t} > \beta''$$

gilt, so besitzt x_0'' eine Entfernung $> \alpha\beta''$ von K_0.

Zu einer beliebigen positiven rationalen Zahl $i_1 < 1$ und einer beliebigen positiven rationalen Zahl i kann man mithin eine solche positive rationale Zahl $i_2 < 1$ bestimmen, daß

$$|i - \operatorname{tg} i_1| > i_2.$$

Insbesondere kann man zu einer beliebigen positiven rationalen Zahl $i_1 < 1$ eine solche positive rationale Zahl $i_2 < 1$ bestimmen, daß

$$|1 - \operatorname{tg} i_1| > i_2,$$

mithin auch (weil im zwischen den Werten 0 und 2 enthaltenen Wertegebiet von y die Ungleichung

$$\frac{d \operatorname{arctg} y}{dy} \geqq \frac{1}{5}$$

besteht)

$$\left|\frac{\pi}{4} - i_1\right| > \frac{i_2}{5},$$

so daß *die Zahl π sich als Ergänzungselement vierter Ordnung von H_2 erweist*[15]), *mithin sich sowohl in einen eindeutigen unendlichen Dezimalbruch wie in einen eindeutigen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln läßt.*

Die Entwickelungen dieses und des vorangehenden Paragraphen bieten Beispiele der Charakterisierung von Ergänzungselementen bzw. Ausfüllungselementen r von H als Ergänzungselemente vierter Ordnung von H

[15]) Die gleiche Eigenschaft der Zahl e ist eine unmittelbare Folge der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung

$$\frac{e-1}{2} = \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2+4\nu}\right]_1^\infty.$$

mittels *positiver Rationalitätsbeweise in* H (die ein Element von H bestimmen, mit dem r zusammenfällt) oder *positiver Irrationalitätsbeweise in* H (die r als von jedem Elemente von H örtlich verschieden erkennen lassen). Hierzu ist zu bemerken, daß sich aus einem *negativen Rationalitäts- bzw. Irrationalitätsbeweise in* H (der die Annahme, daß r von jedem Elemente von H örtlich verschieden wäre bzw. mit einem Elemente von H zusammenfiele, ad absurdum führt) nicht einmal folgern läßt, daß r Ergänzungselement erster Ordnung von H ist. Eben deshalb haben wir in diesem Paragraphen den Lambertschen negativen Irrationalitätsbeweis von π einer passenden Umarbeitung unterzogen und in die obige positive Form gebracht. Die weiteren klassischen Beweise desselben Satzes lassen sich übrigens in analoger Weise ergänzen.

§ 6.

Reelle Zahlen, welche keine Dezimalbruchentwicklung besitzen.

Sei c_n die n-te Ziffer der unendlichen Dezimalbruchentwicklung von π. Wir werden sagen, daß n sich im *ersten Falle* befindet, wenn $c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+4}$ alle gleich sind, im *zweiten Falle*, wenn $c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+9}$ alle verschieden sind, und im *dritten Falle*, wenn weder der erste, noch der zweite Fall vorliegt.

Wir definieren ein Ergänzungselement r der geordneten Menge der endlichen Dezimalbrüche H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n-1},$$

wo $a_n = 0$, wenn n sich im ersten Falle befindet, $a_n = 10$, wenn n sich im zweiten Falle befindet, sonst $a_n = 9$.

Dieses Ergänzungselement würde erst dann ein Ergänzungselement erster Ordnung von H_1 darstellen, m. a. W. eine unendliche Dezimalbruchentwicklung zulassen, wenn man eine Methode besäße, für jedes beliebige im dritten Falle befindliche n, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ mit der Eigenschaft, daß jede zwischen n und m liegende ganze Zahl sich im dritten Falle befände, ad absurdum zu führen, *oder* die Existenz eines im ersten Falle befindlichen $m > n$ mit der Eigenschaft, daß jede zwischen n und m liegende ganze Zahl sich im dritten Falle befände, ad absurdum zu führen.

Wir definieren weiter ein Ergänzungselement erster Ordnung r von H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n-1},$$

wo jedes a_n entweder gleich 0 oder gleich 9 ist, während $a_1 = 9$ und a_{n+1} dann und nur dann von a_n verschieden ist, wenn n sich im zweiten Falle befindet.

Dieses Ergänzungselement erster Ordnung würde erst dann ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H_1 darstellen, m. a. W. die im § 3 definierte eindeutige unendliche Dezimalbruchentwicklung zulassen, wenn man eine Methode besäße, für jedes ganze positive n mit der Eigenschaft, daß entweder keine oder eine gerade Anzahl von ganzen positiven Zahlen $\leqq n$ sich im zweiten Falle befindet, *entweder* die Existenz *oder* die Abwesenheit eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H_1 würde dasselbe Ergänzungselement erst dann darstellen, wenn man eine Methode besäße, für jedes ganze positive n mit der Eigenschaft, daß entweder keine oder eine gerade Anzahl von ganzen positiven Zahlen $\leqq n$ sich im zweiten Falle befindet, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen, *oder* ein im zweiten Falle befindliches $m > n$ anzugeben.

Wir definieren schließlich ein Ergänzungselement dritter Ordnung r von H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n-1},$$

wo $a_n = 9$, wenn n sich im zweiten Falle befindet, sonst $a_n = 0$.

Dieses Ergänzungselement dritter Ordnung würde erst dann ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H_1 darstellen, wenn man eine Methode besäße, für jedes ganze positive n, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen, *oder* ein im zweiten Falle befindliches $m > n$ anzugeben.

Sämtliche Beispiele dieses Paragraphen fallen übrigens in H_1 zusammen mit Ergänzungselementen vierter Ordnung der geordneten Menge der endlichen Dualbrüche H_0.

Für Beispiele reeller Zahlen ohne Dezimalbruchentwicklung besteht bei der Weiterentwicklung der Mathematik stets die Möglichkeit, daß sie einmal hinfällig werden; dann aber können sie immer durch solche, welche ihre Gültigkeit behalten haben, ersetzt werden.

(Eingegangen am 10. 12. 1920.)

Über Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlicher.

Von

Karl Reinhardt in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Deutet man ein Paar komplexer Größen z_1, z_2 bezw. w_1, w_2 als Punkt eines vierdimensionalen Raumes, so werden zwei analytische Funktionen w_1 und w_2 von z, z_2 eine Abbildung eines gewissen Bereiches aus jenem Raum auf einen zweiten Bereich vermitteln. Da bei einer solchen Abbildung die Winkel im allgemeinen nicht erhalten bleiben, spricht man besser nicht von einer konformen, sondern einfach von einer analytischen Abbildung. Über eine solche lassen sich dann dieselben Fragestellungen aufwerfen, wie bei der konformen Abbildung der Ebene. Aus der vorliegenden Arbeit ergibt sich nun, daß ein dem Riemannschen entsprechender allgemeiner Abbildungssatz jedenfalls nicht existiert.

Es soll nämlich im folgenden gezeigt werden, daß sich gewisse vierdimensionale schlichte Bereiche, die hier an die Stelle des Kreises in der Ebene treten, analytisch und umkehrbar eindeutig nicht aufeinander abbilden lassen. Zu diesem Zweck werden in einem ersten Teil die geometrischen Verhältnisse in jenem vierdimensionalen Raum, welchen wir unter Zuhilfenahme eines komplexen Koordinatensystems zur Deutung der analytischen Abbildungen verwenden, untersucht und die oben erwähnten Kreisbereiche definiert (§ 5). Im zweiten Teil handelt es sich dann um die Übertragung gewisser Hilfssätze aus der konformen Abbildung der Ebene — des Schwarzschen Lemmas und des Spiegelungsprinzips — auf die vierdimensionalen analytischen Abbildungen. Die so erhaltenen Hilfsmittel setzen uns in den Stand, im dritten Teil den Beweis für die Nichtexistenz jener Abbildungen zu führen (§ 4). Dabei ergeben sich gleichzeitig noch einige Sätze über die analytischen Abbildungen der betrachteten Bereiche in sich (§ 5).

Ein mit dem vorstehenden eng zusammenhängendes Problem hat

H. Poincaré früher behandelt[1]). Er untersucht (übrigens mit völlig andersartigen Methoden) die analytische Abbildbarkeit (dreidimensionaler) Räume des vierdimensionalen Raumes aufeinander und kommt im Verfolg dieser Betrachtungen zu der Erkenntnis, daß vierdimensionale von solchen Räumen umschlossene Bereiche nicht immer analytisch aufeinander abgebildet werden können, wenn die Abbildungsfunktionen noch auf dem Rande regulär sind. Unsere Behandlung setzt diese wesentliche Einschränkung nicht voraus[2]).

I. Teil.

Der analytische Raum.

In einem vierdimensionalen Euklidischen Raum seien zwei zueinander orthogonale Ebenen als Koordinatenebenen gegeben. Die eine sei die komplexe Zahlenebene der z_1 $(z_1 = x_1 + i\cdot y_1 = r_1\cdot e^{i\varphi_1})$, die zweite diejenige der z_2 $(z_2 = x_2 + i\cdot y_2 = r_2\cdot e^{i\varphi_2})$. Der Nullpunkt $z_1 = z_2 = 0$ möge der Schnittpunkt beider Ebenen sein. Die beiden reellen (x_1, x_2) und die beiden imaginären (y_1, y_2) Achsen bilden dabei ein gewöhnliches vierdimensionales orthogonales Cartesisches Koordinatensystem.

Die eindeutigen analytischen Funktionszweige $z_2 = f(z_1)$ und $z_1 = g(z_2)$ können dann als (zweidimensionale) Flächenstücke im vierdimensionalen Raum gedeutet werden. Solche Flächenstücke mögen im folgenden kurz *analytische Flächenstücke* heißen. Insbesondere nennen wir die durch lineare analytische Funktionen dargestellten Gebilde $(a_1\cdot z_1 + a_2\cdot z_2 + a = 0)$ *analytische Ebenen*. Zu diesen gehören offenbar die Koordinatenebenen.

Den Inbegriff der Punkte und der analytischen Flächenstücke des vierdimensionalen Raumes nennen wir den *analytischen Raum*. Der analytische Raum enthält als solcher weder dreidimensionale Räume noch eindimensionale Kurven (vgl. dazu Satz 5, S. 218 u. Satz 9, S. 223).

Zwei in einem (vierdimensionalen) Bereich eindeutige analytische Funktionszweige w_1 und w_2 $(w_1 = u_1 + i\cdot v_1 = s_1\cdot e^{i\chi_1},\ w_2 = u_2 + i\cdot v_2 = s_2\cdot e^{i\chi_2})$ der beiden Veränderlichen z_1 und z_2:

$$w_1 = f_1(z_1, z_2),$$
$$w_2 = f_2(z_1, z_2),$$

deren Funktionaldeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

---

[1]) H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rend. Circ. Matem. Palermo 23 (1907).

[2]) Die vorstehende Abhandlung hat der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Frankfurt am Main im März 1921 als Habilitationsschrift vorgelegen.

nicht identisch verschwindet, vermitteln eine eindeutige Abbildung dieses Bereiches auf einen anderen solchen Bereich. Wir nennen sie *analytische Abbildung*.

Jede analytische Abbildung führt jedes analytische Flächenstück des abgebildeten Bereiches in ein analytisches Flächenstück des Bildbereiches über.

§ 1.

Die Bewegungen.

Wir untersuchen zunächst die einfachsten Abbildungen des vierdimensionalen Raumes hinsichtlich ihres analytischen Charakters.

Die allgemeinste *Parallelverschiebung* wird durch die reellen linearen Funktionen:

$$(1')\qquad \begin{aligned} u_1 &= x_1 + p_1, & u_2 &= x_2 + p_2, \\ v_1 &= y_1 + q_1, & v_2 &= y_2 + q_2 \end{aligned}$$

vermittelt. Setzen wir $p_1 + iq_1 = r_1$, $p_2 + iq_2 = r_2$, so sind diese Funktionen den beiden analytischen Funktionen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} w_1 &= z_1 + r_1, \\ w_2 &= z_2 + r_2 \end{aligned}$$

vollkommen äquivalent und wir erhalten daher den

Satz 1. *Jede Parallelverschiebung ist eine analytische Abbildung.*

Wir betrachten ferner die durch die reellen linearen Funktionen:

$$(2')\qquad \begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}y_1 + e_{13}x_2 + e_{14}y_2, \\ v_1 &= e_{21}x_1 + e_{22}y_1 + e_{23}x_2 + e_{24}y_2, \\ u_2 &= e_{31}x_1 + e_{32}y_1 + e_{33}x_2 + e_{34}y_2, \\ v_2 &= e_{41}x_1 + e_{42}y_1 + e_{43}x_2 + e_{44}y_2, \end{aligned}$$

deren Koeffizienten den Bedingungen:

$$(2_1')\qquad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{4} e_{ik}^2 &= 1 \\ \sum_{k=1}^{4} e_{ik}\cdot e_{lk} &= 0 \end{aligned} \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4;\ i \neq l)$$

genügen, vermittelte allgemeinste *Drehung* um den Nullpunkt. Setzen wir:

$$\begin{aligned} (e_{11}+e_{22}) + i\cdot(e_{21}-e_{12}) &= 2a_1, & (e_{31}+e_{42}) + i\cdot(e_{41}-e_{32}) &= 2b_1, \\ (e_{11}-e_{22}) + i\cdot(e_{21}+e_{12}) &= 2c_1, & (e_{31}-e_{42}) + i\cdot(e_{41}+e_{32}) &= 2d_1, \\ (e_{13}+e_{24}) + i\cdot(e_{23}-e_{14}) &= 2a_2, & (e_{33}+e_{44}) + i\cdot(e_{43}-e_{34}) &= 2b_2, \\ (e_{13}-e_{24}) + i\cdot(e_{23}+e_{14}) &= 2c_2, & (e_{33}-e_{44}) + i\cdot(e_{43}+e_{34}) &= 2d_2, \end{aligned}$$

so sind die Funktionen $(2')$ den beiden Funktionen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_1\cdot z_1 + c_1\cdot\bar z_1 + a_2\cdot z_2 + c_2\cdot\bar z_2\\ w_2 &= b_1\cdot z_1 + d_1\cdot\bar z_1 + b_2\cdot z_2 + d_2\cdot\bar z_2\end{aligned}$$

völlig äquivalent[3]). Dabei können die Bedingungen $(2_1')$, wie man sich leicht überzeugt, durch die folgenden ersetzt werden:

$$(2_1)\qquad \begin{gathered} |a_1|^2+|c_1|^2+|a_2|^2+|c_2|^2=1,\\ |b_1|^2+|d_1|^2+|b_2|^2+|d_2|^2=1,\\ a_1\cdot c_1 + a_2\cdot c_2 = 0,\\ b_1\cdot d_1 + b_2\cdot d_2 = 0,\\ a_1\cdot\bar b_1 + c_1\cdot\bar d_1 + a_2\cdot\bar b_2 + c_2\cdot\bar d_2 = 0,\\ a_1\cdot d_1 + b_1\cdot c_1 + a_2\cdot d_2 + b_2\cdot c_2 = 0.\end{gathered}$$

Hiermit ergibt sich sofort der

Satz 2. *Eine Drehung um den Nullpunkt ist im allgemeinen keine analytische Abbildung.*

Sie ist offenbar dann und nur dann eine analytische Abbildung, wenn in (2):

$$c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$$

st. Eine solche Drehung wollen wir kurz eine *analytische Drehung* nennen. Die anderen Drehungen mögen im Gegensatz hierzu *nicht-analytische Drehungen* heißen. Als allgemeine Form einer analytischen Drehung um den Nullpunkt erhalten wir also:

$$(3)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_1\cdot z_1 + a_2\cdot z_2,\\ w_2 &= b_1\cdot z_1 + b_2\cdot z_2,\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten nach (2_1) den Bedingungen:

$$(3_1)\qquad \begin{gathered} |a_1|^2+|a_2|^2=1,\\ |b_1|^2+|b_2|^2=1,\\ a_1\cdot\bar b_1 + a_2\cdot\bar b_2 = 0\end{gathered}$$

genügen müssen. Eine der einfachsten dieser Drehungen ist die doppelte Rotation um die Koordinatenebenen:

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i\varphi_1}\cdot z_1,\\ w_2 &= e^{i\varphi_2}\cdot z_2.\end{aligned}$$

[3]) $\bar z$ bedeutet hier und im folgenden in der üblichen Weise die zur komplexen Zahl z konjugierte Zahl.

Die Auflösungen der Gleichungen (2) nach z_1 und z_2 sind die folgenden:

$$z_1 = \bar{a}_1 \cdot w_1 + c_1 \cdot \bar{w}_1 + \bar{b}_1 \cdot w_2 + d_1 \cdot \bar{w}_2,$$
$$z_2 = \bar{a}_2 \cdot w_1 + c_2 \cdot \bar{w}_1 + \bar{b}_2 \cdot w_2 + d_2 \cdot \bar{w}_2,$$

deren Koeffizienten den sich auch aus (2_1) ergebenden Bedingungen:

$$|a_1|^2 + |c_1|^2 + |b_1|^2 + |d_1|^2 = 1,$$
$$|a_2|^2 + |c_2|^2 + |b_2|^2 + |d_2|^2 = 1,$$
$$a_1 \cdot \bar{c}_1 + b_1 \cdot \bar{d}_1 = 0,$$
$$a_2 \cdot \bar{c}_2 + b_2 \cdot \bar{d}_2 = 0,$$
$$a_1 \cdot \bar{a}_2 + \bar{c}_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot \bar{b}_2 + \bar{d}_1 \cdot d_2 = 0,$$
$$a_1 \cdot \bar{c}_2 + a_2 \cdot \bar{c}_1 + b_1 \cdot \bar{d}_2 + b_2 \cdot \bar{d}_1 = 0$$

genügen. Für analytische Drehungen wird insbesondere:

$$z_1 = \bar{a}_1 w_1 + \bar{b}_1 w_2,$$
$$z_2 = \bar{a}_2 w_1 + \bar{b}_2 w_2,$$

mit den Bedingungen:

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1,$$
$$|a_2|^2 + |b_2|^2 = 1,$$
$$a_1 \cdot \bar{a}_2 + b_1 \cdot \bar{b}_2 = 0.$$

Im übrigen folgt aus (2_1):

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & c_1 & a_2 & c_2 \\ \bar{c}_1 & \bar{a}_1 & \bar{c}_2 & \bar{a}_2 \\ b_1 & d_1 & b_2 & d_2 \\ \bar{d}_1 & \bar{b}_1 & \bar{d}_2 & \bar{b}_2 \end{matrix} \right\|^2 = 1,$$

und für analytische Drehungen:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_1 & 0 & \bar{a}_2 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & \bar{b}_1 & 0 & \bar{b}_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|^2 = 1.$$

Eine beliebige Bewegung des analytischen Raumes ist nach dem Vorangegangenen im allgemeinen keine analytische Abbildung; sie ist es nur dann, wenn der in ihr enthaltene rotative Teil eine analytische Drehung ist.

§ 2.

Die analytischen Ebenen.

Um einen genaueren Einblick in die Struktur des analytischen Raumes zu gewinnen, betrachten wir jetzt die Gesamtheit der durch den Nullpunkt des vierdimensionalen Raumes gehenden (zweidimensionalen) Ebenen. Jede dieser Ebenen kann als Schnittgebilde einer einparametrigen Schar von Paaren zueinander orthogonaler (dreidimensionaler) Räume aufgefaßt werden. Sind die Gleichungen eines solchen Raumpaares die folgenden:

$$(4')\qquad \begin{aligned} e_{11}x_1 + e_{12}y_1 + e_{13}x_2 + e_{14}y_2 = 0,\\ e_{21}x_1 + e_{22}y_1 + e_{23}x_2 + e_{24}y_2 = 0, \end{aligned}$$

mit den Bedingungen:

$$(4_1')\qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{4} e_{ik}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2),\\ &\sum_{k=1}^{4} e_{1k}\cdot e_{2k} = 0, \end{aligned}$$

so haben die anderen Raumpaare die Gleichungen:

$$(4_2')\left\{\begin{aligned} &(m_1\cdot e_{11} + m_2\cdot e_{21})\cdot x_1 + (m_1\cdot e_{12} + m_2\cdot e_{22})\cdot y_1\\ &\qquad + (m_1\cdot e_{13} + m_2\cdot e_{23})\cdot x_2 + (m_1\cdot e_{14} + m_2\cdot e_{24})\cdot y_2 = 0,\\ &(n_1\cdot e_{11} + n_2\cdot e_{21})\cdot x_1 + (n_1\cdot e_{12} + n_2\cdot e_{22})\cdot y_1\\ &\qquad + (n_1\cdot e_{13} + n_2\cdot e_{23})\cdot x_2 + (n_1\cdot e_{14} + n_2\cdot e_{24})\cdot y_2 = 0, \end{aligned}\right.$$

wobei die Multiplikatoren m_1, m_2, n_1, n_2 die Beziehungen:

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 &= 1,\\ n_1^2 + n_2^2 &= 1,\\ m_1 n_1 + m_2 n_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen müssen, so daß man:

$$\begin{aligned} m_1 &= \pm n_2 = \cos\psi,\\ m_2 &= \mp n_1 = -\sin\psi \end{aligned}$$

setzen kann. ψ ist dann der Winkel, den beide Raumpaare miteinander bilden.

Setzen wir nun wieder:

$$\begin{aligned} (e_{11} + e_{22}) + i\cdot(e_{21} - e_{12}) = 2a_1, &\qquad (e_{13} + e_{24}) + i\cdot(e_{23} - e_{14}) = 2a_2,\\ (e_{11} - e_{22}) + i\cdot(e_{21} + e_{12}) = 2c_1, &\qquad (e_{13} - e_{24}) + i\cdot(e_{23} + e_{14}) = 2c_2, \end{aligned}$$

so werden die Gleichungen (4') der folgenden äquivalent:

$$(4)\qquad a_1\cdot z_1 + c_1\cdot \bar z_1 + a_2\cdot z_2 + c_2\cdot \bar z_2 = 0,$$

während die Bedingungen $(4_1')$ in:

$$(4_1) \qquad |a_1|^2+|c_1|^2+|a_2|^2+|c_2|^2=1, \qquad a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_2=0$$

übergehen. Die Gleichungen $(4_2')$ lassen sich dabei so zusammenfassen:

$$(4_2) \qquad e^{i\psi}\cdot(a_1\cdot z_1+c_1\cdot \bar z_1+a_2\cdot z_2+c_2\cdot \bar z_2)=0.$$

Jeder Ebene entspricht also eine bis auf den Faktor $e^{i\psi}$ (bei Erfülltsein der Bedingungen (4_1)) eindeutig bestimmte komplexe Gleichung (4) und jeder solchen Gleichung eine bestimmte Ebene. Wir erhalten gleichzeitig den

Satz 3. *Die durch den Nullpunkt gehenden Ebenen sind im allgemeinen keine analytischen Ebenen.*

Die Ebene (4) ist dann und nur dann eine analytische Ebene, wenn entweder $c_1=c_2=0$ oder $a_1=a_2=0$ ist. Die bis auf den Faktor $e^{i\psi}$ eindeutig bestimmte Gleichung einer analytischen Ebene durch den Nullpunkt ist demnach:

$$(5) \qquad a_1\cdot z_1+a_2\cdot z_2=0,$$

mit der Bedingung:

$$(5_1) \qquad |a_1|^2+|a_2|^2=1.$$

Die anderen Ebenen mögen im Gegensatz hierzu *nichtanalytische Ebenen* heißen.

Die Frage nach dem analytischen Charakter der nicht durch den Nullpunkt gehenden Ebenen beantwortet vollständig der

Satz 4. *Die zu einer analytischen Ebene parallelen Ebenen sind wieder analytische Ebenen. Die zu einer nichtanalytischen Ebene parallelen Ebenen sind wieder nichtanalytische Ebenen.*

Denn es ist klar, daß eine jede nicht durch den Nullpunkt gehende Ebene eine bis auf den Faktor $e^{i\psi}$ eindeutig bestimmte komplexe Gleichung von der Form:

$$a_1\cdot z_1+c_1\cdot \bar z_1+a_2\cdot z_2+c_2\cdot \bar z_2+r=0$$

besitzt, deren Koeffizienten wieder den Bedingungen (4_1) genügen. Da diese Ebene der Ebene (4) parallel ist, so ergibt sich damit der Beweis von Satz 4 ohne weiteres.

Die analytischen Ebenen zeichnen sich vor den allgemeinen Ebenen des vierdimensionalen Raumes durch manche besonderen Eigenschaften aus, die nunmehr hergeleitet werden sollen.

Zunächst haben zwei beliebige Ebenen des vierdimensionalen Raumes entweder keinen (eigentlichen) Punkt gemeinsam oder sie treffen sich in mindestens einem Punkt. Im ersten Fall können sie parallel oder windschief sein; im zweiten Fall schneiden sie sich entweder nur in dem Punkt

oder in einer ganzen Geraden, so daß sie in einem (dreidimensionalen) Raume liegen, oder sie fallen ganz zusammen. Dagegen gilt der

Satz 5. *Zwei analytische Ebenen schneiden sich stets nur in einem Punkte, wofern sie nicht parallel sind oder zusammenfallen.*

Zwei verschiedene analytische Ebenen liegen also nur dann in einem (dreidimensionalen) Raum, wenn sie parallel sind. Der Beweis ergibt sich für durch den Nullpunkt gehende Ebenen einfach daraus, daß die beiden linearen analytischen Ebenengleichungen:

$$a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2 = 0,$$
$$b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2 = 0$$

lediglich die gemeinsame Lösung $z_1 = z_2 = 0$ besitzen, wenn die durch sie dargestellten Ebenen nicht zusammenfallen und die aus den Koeffizienten gebildete Determinante daher von Null verschieden ist. Zwei beliebige analytische Ebenen aber können sich weder in einer Geraden schneiden noch windschief sein, weil sonst die zu ihnen parallelen, durch den Nullpunkt gehenden und nach Satz 4 ebenfalls analytischen Ebenen eine Gerade gemeinsam haben müßten, was eben unmöglich ist.

Eine Ebene ist stets durch drei (nicht in einer Geraden liegende) Punkte bestimmt. Es besteht jedoch der

Satz 6. *Eine analytische Ebene ist durch zwei Punkte bestimmt.*

Denn ist ζ_1, ζ_2 ein vom Nullpunkt verschiedener Punkt, so werden die Koeffizienten der Ebenengleichung $a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$ durch die Beziehung:

$$a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 = 0$$

unter Berücksichtigung der Bedingung (5_1) bis auf den gemeinsamen Faktor $e^{i\varphi}$ eindeutig bestimmt. Durch jeden vom Nullpunkt verschiedenen Punkt geht also eine und nur eine zugleich durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene.

Zwei sich schneidende Ebenen des vierdimensionalen Raumes bilden nach den Ergebnissen der mehrdimensionalen Geometrie zwei wesentliche (als relative Extremwerte definierte) spitze Winkel ε_1 und ε_2 miteinander. Ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, so fallen beide Ebenen zusammen, ist $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, so schneiden sie sich in einer Geraden und liegen in einem (dreidimensionalen) Raum, ist $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}$, so stehen sie halborthogonal zueinander, ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}$, so stehen beide Ebenen ganz orthogonal aufeinander[4]). Bei analytischen Ebenen liegen die Dinge wesentlich einfacher. Hierüber gilt der wichtige

[4]) Über alle diese Fragen aus der Geometrie des vierdimensionalen Raumes vgl. man etwa P. H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil, insbesondere S. 69 ff.

Satz 7. *Zwei nicht parallele analytische Ebenen bilden stets zwei gleiche Winkel miteinander.*

Zum Beweise dieses Satzes denken wir uns die beiden (etwa durch den Nullpunkt gehenden) Ebenen zunächst derart analytisch gedreht, daß die eine mit der z_1-Ebene zusammenfällt. Dabei ändern sich die Winkel nicht. Wir stützen uns dann auf eine von P. H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie, erster Teil, S. 175 ff. ausgeführte Bestimmung der Winkel ε_1 und ε_2 zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 eines vierdimensionalen Raumes.

Sind die Gleichungen von E_1 und E_2 die folgenden:

$$E_1: \begin{array}{l} x_2 = 0, \\ y_2 = 0, \end{array}$$

$$E_2: \begin{array}{l} x_2 = e_{11} x_1 + e_{12} y_1, \\ y_2 = e_{21} x_1 + e_{22} y_1, \end{array}$$

so ergeben sich nach Schouten, S. 176, ε_1 und ε_2 aus der Beziehung:

$$\cos^2 \varepsilon = \frac{\lambda^2 + 1}{(e_{11} \cdot \lambda + e_{12})^2 + (e_{21} \lambda + e_{22})^2 + \lambda^2 + 1}, \tag{6}$$

wenn man für λ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(e_{11} \cdot e_{12} + e_{21} \cdot e_{22}) \cdot \lambda^2 - ((e_{11}^2 + e_{21}^2) - (e_{12}^2 + e_{22}^2)) \cdot \lambda \\ - (e_{11} \cdot e_{12} + e_{21} \cdot e_{22}) = 0$$

einsetzt. Nun lauten die Ebenengleichungen in unserem Fall:

$$E_1: \; z_2 = 0,$$
$$E_2: \; z_2 = m \cdot z_1;$$

daher wird[5]):

$$e_{11} = R(m), \qquad e_{12} = -J(m),$$
$$e_{21} = J(m), \qquad e_{22} = R(m).$$

Die quadratische Gleichung für λ ist dann identisch erfüllt, während die Beziehung (6) von λ unabhängig wird und sich für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ die Bestimmungsgleichung:

$$\cos^2 \varepsilon = \frac{1}{|m|^2 + 1} \tag{7}$$

ergibt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zwei nicht parallele Ebenen, deren beide Winkel einander gleich sind, bilden (s. a. a. O.) eine einparametrige Schar von gleichen Neigungswinkeln miteinander. Wir sprechen daher bei zwei analytischen Ebenen im folgen-

[5]) $R(a)$ und $J(a)$ bedeuten dabei bzw. den reellen und den imaginären Teil der komplexen Zahl a.

den kurz von „dem“ Winkel ε, den sie miteinander bilden. Lauten die Gleichungen der beiden Ebenen:

$$a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2 = 0, \qquad |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1,$$
$$b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2 = 0, \qquad |b_1|^2 + |b_2|^2 = 1,$$

so werden sie durch die analytische Drehung:

$$w_1 = \bar{a}_2 \cdot z_1 - \bar{a}_1 \cdot z_2,$$
$$w_2 = a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2$$

in die Ebenen E_1 und E_2 übergeführt. Dann wird aber:

$$m = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{\bar{a}_2 \cdot b_2 + \bar{a}_1 \cdot b_1},$$

und aus den vorhergehenden Betrachtungen (s. Gleichung (7)) folgt, daß sich ihr Neigungswinkel ε aus den Beziehungen:

$$\cos \varepsilon = |a_1 \cdot \bar{b}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2|,$$
$$\sin \varepsilon = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1|$$

bestimmt. Insbesondere stehen zwei solche analytische Ebenen also orthogonal zueinander, wenn

$$a_1 \cdot \bar{b}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2 = 0$$

ist. Übrigens ist auch Satz 5 offenbar nur ein Spezialfall unseres Satzes.

Um zum Schlusse noch die Richtigkeit einer gewissen Umkehrung des Satzes 7 zu beweisen, stellen wir zunächst folgende Überlegung an. Wir setzen in jeder Koordinatenebene denjenigen Umlaufssinn, welcher die positiv reelle Achse durch $\frac{\pi}{2}$ in die positiv imaginäre Achse überführt, als den positiven fest. Dadurch wird auf jeder beliebigen durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene ein positiver Umlaufssinn bestimmt, nämlich derjenige, dessen Projektionen auf die Koordinatenebenen mit deren Umlaufssinn übereinstimmen[6]). Eine beliebige analytische Ebene möge den gleichen Umlaufssinn haben, wie die ihr parallele durch den Nullpunkt gehende Ebene.

Liegt nun eine beliebige Ebene E_2 vor, welche eine analytische Ebene E_1 in einem Punkte P schneidet und mit ihr zwei und damit unendlich viele gleiche Winkel ε $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ bildet, so denken wir uns die einparametrige Schar der sämtlichen zu E_1 und E_2 halborthogonalen und den Winkel ε enthaltenden Ebenen konstruiert. Drehen wir dann die Schnitt-

---

[6]) Aus $z_2 = m \cdot z_1$ folgt, daß $\operatorname{arc} z_1$ und $\operatorname{arc} z_2$ beide *zugleich* wachsen oder abnehmen.

linie einer dieser Ebenen mit E_1 in deren positivem Umlaufssinn, so dreht sich die Schnittlinie derselben Ebene mit der zu E_1 in P orthogonalen und daher ebenfalls analytischen Ebene E_3 gleichzeitig in einem bestimmten Umlaufssinn. Je nachdem dieser mit dem positiven Umlaufssinn der Ebene E_3 übereinstimmt oder nicht, sagen wir, die Ebene E_2 habe den gleichen oder den entgegengesetzten Umlaufssinn wie die Ebene E_1. Ist E_2 selbst analytisch, so hat sie stets denselben Umlaufssinn wie E_1.

Wir beweisen nun noch folgenden

Satz 8. *Alle Ebenen, welche mit einer analytischen Ebene zwei gleiche Winkel bilden und denselben Umlaufssinn besitzen, sind ebenfalls analytische Ebenen.*

Zum Beweise denken wir uns die gegebene analytische Ebene E_1 analytisch so gedreht, daß sie mit der z_1-Ebene zusammenfällt. Die Umlaufsrichtungen der analytischen Ebenen sind invariant gegen analytische Drehungen. Die Gleichung der Ebene E_1 ist dann:

$$z_2 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = y_2 = 0,$$

diejenige der anderen Ebene E_2 sei:

$$\begin{aligned} x_2 &= e_{11} x_1 + e_{12} y_1, \\ y_2 &= e_{21} x_1 + e_{22} y_1 \text{ [7]}. \end{aligned}$$

Sollen E_1 und E_2 zwei gleiche Winkel miteinander bilden, so muß die rechte Seite von (6) von λ unabhängig und die quadratische Gleichung für λ identisch erfüllt sein. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn:

$$\begin{aligned} e_{11} \cdot e_{12} + e_{21} \cdot e_{22} &= 0, \\ (e_{11}^2 + e_{21}^2) - (e_{12}^2 + e_{22}^2) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt aber:

$$\begin{aligned} e_{22} &= \pm e_{11}, \\ e_{21} &= \mp e_{12}. \end{aligned}$$

Setzen wir $e_{11} - i \cdot e_{12} = m$, so kann die Gleichung von E_2 also in eine der beiden Formen:

$$\begin{aligned} z_2 &= m \cdot z_1, \\ z_2 &= \overline{m} \cdot \bar{z}_1 \end{aligned}$$

gebracht werden. Da die zweite dieser Ebenen einen zur z_1-Ebene entgegengesetzten Umlaufssinn besitzt, so kommt hier nur die erste in Frage. Diese ist aber analytisch.

Um einen Überblick über die geometrische Lagerung der durch den

[7]) Diese Darstellung ist bei einer Ebene E_2, die mit der z_1-Ebene zwei gleiche Winkel bildet, stets möglich.

Nullpunkt gehenden analytischen Ebenen zu bekommen, stellen wir deren Gleichungen in der (nicht normierten) Form:

$$z_2 = m \cdot z_1$$

dar. Ist dann ε der Neigungswinkel einer solchen Ebene gegen die z_1-Ebene, so erhalten wir auf Grund unserer vorangegangenen Überlegungen zur Bestimmung von ε die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = |m|.$$

Zu jedem Neigungswinkel ε $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ gehört hiernach ein einparametriger Kranz von analytischen Ebenen:

$$z_2 = m \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1,$$

die mit der z_1-Ebene sämtlich den gleichen Winkel ε bilden. Wir greifen zwei Ebenen eines solchen Kranzes heraus und berechnen den Winkel η, den sie miteinander einschließen. Ihre Gleichungen seien:

$$z_2 = m \cdot z_1,$$
$$z_2 = m \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1.$$

Dann ergibt sich η aus der Gleichung:

$$\sin \eta = \frac{|m|}{1 + |m|^2} \cdot |e^{i\varphi} - 1| = \frac{|m|}{1 + |m|^2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = \sin 2\varepsilon \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Wenn also φ von 0 bis 2π wächst, so wächst η erst von 0 bis 2ε für $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{4}$ und von 0 bis $\pi - 2\varepsilon$ für $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$, um sodann wieder von 2ε bzw. $\pi - 2\varepsilon$ bis 0 zu fallen. Die Ebenen eines solchen Kranzes bilden daher mit einer bestimmten von ihnen alle Winkel von 0 bis 2ε bzw. $\pi - 2\varepsilon$. Für $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ kommen gerade sämtliche Winkel von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ vor.

Im übrigen geht durch jede analytische Bewegung die Gesamtheit der analytischen Ebenen in sich über. Insbesondere dreht die analytische Rotation:

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$
$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2$$

für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ jede durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene in sich um den Winkel φ, während für $\varphi_1 \neq \varphi_2$ die Ebenen jedes einzelnen der eben betrachteten Kränze untereinander vertauscht werden.

§ 3.

Die analytischen Flächen.

Im Anschluß an unsere Untersuchungen über analytische Ebenen notieren wir noch einige Sätze über analytische Flächenstücke.

Satz 9. *Zwei analytische Flächenstücke schneiden sich höchstens in Punkten, niemals in Kurven.*

Dieser Satz ist die geometrische Interpretation des funktionentheoretischen Theorems, daß zwei analytische Funktionen, die längs eines Kurvenstückes übereinstimmen, identisch sind.

Satz 10. *Jedes analytische Flächenstück besitzt in jedem Punkte eine eindeutig bestimmte Tangentialebene, welche zu den analytischen Ebenen gehört.*

Sei:

$$z_2 = f(z_1)$$

die Gleichung des Flächenstücks; nehmen wir dann auf demselben zwei benachbarte Punkte (z_1', z_2') und $(z_1' + \Delta z_1', z_2' + \Delta z_2')$ an, so lautet die Gleichung der durch diese beiden Punkte nach Satz 6, S. 218, bestimmten analytischen Ebene:

$$z_2 - z_2' = \frac{\Delta z_2'}{\Delta z_1'} \cdot (z_1 - z_1').$$

Nach den Ausführungen von S. 222 bestimmt sich der Winkel ε, den diese Ebene mit der z_1-Ebene bildet, aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \left| \frac{\Delta z_2'}{\Delta z_1'} \right|.$$

Lassen wir nun den Punkt $(z_1' + \Delta z_1', z_2' + \Delta z_2')$ auf einem beliebigen Wege in der Fläche gegen den Punkt (z_1', z_2') gehen, so nähert sich die eben genannte Ebene einer eindeutig bestimmten Grenzebene, die ebenfalls eine analytische Ebene sein muß. Ihre Gleichung lautet:

$$z_2 - z_2' = \left(\frac{d f(z_1)}{d z_1} \right)_{z_1 = z_1'} \cdot (z_1 - z_1'),$$

und der Winkel ε, den sie mit der z_1-Ebene bildet, ergibt sich aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \left| \frac{d f(z_1)}{d z_1} \right|.$$

Der absolute Betrag der Ableitung bestimmt also die Größe des Winkels ε, während ihr Arcus die Lage der Tangentialebene innerhalb des Kranzes derjenigen analytischen Ebenen charakterisiert, die alle diesen selben Winkel mit der z_1-Ebene bilden.

Satz 11. *Zwei analytische Flächenstücke, die einen Punkt gemeinsam haben, schneiden sich in demselben unter einem eindeutig bestimmten Winkel.*

Dieser Satz folgt aus Satz 10, S. 223, in Gemeinschaft mit Satz 7, S. 219.

§ 4.

Über gewisse nichtanalytische Ebenen.

Wir wollen jetzt gewisse Scharen nichtanalytischer Ebenen betrachten, welche in den späteren Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen werden.

Wir legen zunächst durch eine Gerade $\varphi_1 =$ konst. der z_1-Ebene und eine Gerade $\varphi_2 =$ konst. der z_2-Ebene eine Ebene, die nichtanalytischen Charakter haben muß, da sie die beiden analytischen Koordinatenebenen in Geraden schneidet. Lassen wir φ_1 und φ_2 unabhängig voneinander alle möglichen Werte durchlaufen, so erhalten wir eine zweiparametrige Ebenenschar, die wir aus einem sogleich ersichtlichen Grunde die Schar der *absoluten Ebenen* nennen wollen. Die Gleichung der durch die Parameter φ_1, φ_2 charakterisierten Ebene dieser Schar ist offenbar:

$$(8) \qquad \frac{i}{2}\cdot e^{-i\varphi_1}\cdot z_1 - \frac{i}{2}\cdot e^{i\varphi_1}\cdot \bar{z}_1 - \frac{1}{2}\cdot e^{-i\varphi_2}\cdot z_2 + \frac{1}{2}\cdot e^{i\varphi_2}\cdot \bar{z}_2 = 0.$$

Für $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ geht hieraus die Gleichung der durch beide reelle Achsen gehenden *reellen Ebene* hervor:

$$(8_1) \qquad \frac{i}{2}\cdot(z_1 - \bar{z}_1) - \frac{1}{2}\cdot(z_2 - \bar{z}_2) = 0,$$

die mit den beiden Beziehungen:

$$z_1 = \bar{z}_1, \qquad z_2 = \bar{z}_2$$

äquivalent ist. Die reelle Ebene ist das Bild der Gesamtheit derjenigen Punkte des analytischen Raumes, welche reelle Koordinaten besitzen. Ebenso erhält man für $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ die Gleichung der durch beide imaginäre Achsen gehenden *imaginären Ebene*:

$$(8_2) \qquad \frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1) + \frac{i}{2}\cdot(z_2 + \bar{z}_2) = 0,$$

die mit den beiden Beziehungen:

$$z_1 = -\bar{z}_1, \qquad z_2 = -\bar{z}_2$$

äquivalent ist.

Über die absoluten Ebenen gilt folgender

Satz 12. *Durch jeden nicht auf einer Koordinatenebene liegenden Punkt geht eine und nur eine absolute Ebene.*

Fällen wir nämlich von dem Punkte $P(z_1 = r_1\cdot e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2\cdot e^{i\varphi_2})$ die Lote auf die beiden Koordinatenebenen und verbinden wir deren Fußpunkte mit dem Nullpunkte, so müssen die beiden Lote und die beiden

Verbindungslinien in einer Ebene liegen. Denn sie bilden zusammen ein Viereck mit vier rechten Winkeln. Da bei jedem räumlichen Viereck die Winkelsumme kleiner als 2π ist, so kann ein solches Viereck nur ein ebenes sein. Diese Ebene ist aber gerade die durch die Parameterwerte φ_1, φ_2 bestimmte absolute Ebene. Legen wir in ihr ein rechtwinkliges Cartesisches Achsenkreuz fest, dessen Achsen mit den Schnittlinien der absoluten Ebene mit den Koordinatenebenen zusammenfallen, so besitzt der Punkt P als Cartesische Koordinaten in der Ebene — abgesehen vom Vorzeichen — offenbar gerade die absoluten Werte seiner komplexen Koordinaten $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, womit sich unsere Bezeichnungsweise dieser Ebenen erklärt.

Der Punkt P kann aber nicht noch auf einer zweiten absoluten Ebene liegen. Denn jede absolute Ebene steht halborthogonal zu jeder Koordinatenebene. Deshalb müßten die Lote, welche wir von P aus in einer solchen zweiten absoluten Ebene auf deren Spuren mit den Koordinatenebenen fällen könnten, zugleich senkrecht zu den Koordinatenebenen selbst stehen, d. h. aber, die zweite Ebene wäre mit der absoluten Ebene φ_1, φ_2 identisch.

Durch die analytische Drehung:

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$
$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2$$

kann die reelle Ebene in jede beliebige absolute Ebene übergeführt werden. Bei jeder solchen Drehung geht die Gesamtheit der absoluten Ebenen in sich über.

Wir notieren noch den

Satz 13. *Ein Punkt wird an der reellen Ebene gespiegelt, indem man seinen Koordinaten die konjugierten Werte erteilt.*

An der reellen Ebene spiegeln heißt nämlich, von dem gegebenen Punkte P auf diese Ebene das Lot fällen und es um sich selbst bis zum Punkte Q verlängern. Projizieren wir die das Lot tragende Gerade auf die z_1-Ebene, so muß bewiesen werden, daß die Projektionen P' und Q' von P und Q spiegelbildlich zur reellen Achse der z_1-Ebene liegen. Dies ist aber klar; denn bezeichnen wir den auf der reellen Ebene liegenden Mittelpunkt von PQ mit R und seine auf der reellen Achse der z_1 liegende Projektion mit R', so ist R' offenbar die Mitte von $P'Q'$ und ferner steht $R'P'$ senkrecht auf der reellen Achse nach dem leicht zu beweisenden geometrischen Satz: Projiziert man einen Punkt P des vierdimensionalen Raumes auf zwei sich in einer Geraden schneidende Ebenen, so projizieren sich die erhaltenen Projektionen R und P' auf die Schnitt-

gerade in demselben Punkte R'. Da dieselbe Überlegung für die z_2-Ebene gilt, so ist unser Satz damit bewiesen[8]).

Eine weitere Schar nichtanalytischer Ebenen erhalten wir auf folgende Weise. Wir betrachten die Gesamtheit der Punkte, für welche $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 + \varphi_2 =$ konst. $= \varphi$ ist. Diese Gesamtheit muß offenbar eine Ebene von der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \bar{z}_2 = 0 \tag{9}$$

erfüllen. Lassen wir φ alle möglichen Werte durchlaufen, so bekommen wir eine einparametrige Ebenenschar, die wir die Schar der *Diagonalebenen* nennen wollen.

Zwei Diagonalebenen können sich niemals schneiden. Dagegen schneidet jede Diagonalebene eine einparametrige Schar von absoluten Ebenen, nämlich diejenigen durch die Parameter φ_1, φ_2 charakterisierten Ebenen, für welche $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ ist. Umgekehrt schneidet jede absolute Ebene zwei Diagonalebenen, nämlich die durch den Parameter φ charakterisierten Ebenen, für die $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \pi$ ist. Außerdem gilt der

Satz 14. *Jede Diagonalebene kann durch eine analytische Drehung in die reelle Ebene übergeführt werden.*

Ist nämlich (9) die Gleichung der Diagonalebene, so transformiert die analytische Drehung:

$$z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot w_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot w_2,$$
$$z_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi} \cdot w_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi} w_2$$

diese Ebene in die reelle Ebene (8_1), wie man durch Einsetzen sofort erkennt.

Wir notieren schließlich den

Satz 15. *Die Diagonalebenen stehen auf denjenigen absoluten Ebenen, von denen sie geschnitten werden, halborthogonal.*

Zum Beweise denken wir uns zunächst die Diagonalebene und eine sie schneidende absolute Ebene durch eine Transformation:

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$
$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2$$

---

[8]) Mittels des Begriffes der absoluten Ebenen und des geometrisch leicht zu beweisenden Satzes, daß jede (durch den Nullpunkt gehende) analytische Ebene halborthogonal zu jeder sie schneidenden absoluten Ebene steht, ergibt sich übrigens auch rein geometrisch leicht die Richtigkeit der Sätze 7 und 8 von § 2.

so gedreht, daß die letztere in die reelle Ebene übergeht. Dann muß wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ die Diagonalebene in die andere Diagonalebene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \bar{z}_2 = 0$$

übergehen, welche die reelle Ebene schneidet. Die letztere geht aber durch Spiegelung an der reellen Ebene (s. Satz 13, S. 225) in sich über, wie man sofort sieht. Sie ist daher zur reellen Ebene in der Tat halborthogonal.

§ 5.

Die Kreisbereiche.

Es sollen jetzt diejenigen speziellen vierdimensionalen Bereiche definiert werden, auf welche sich die später aufgestellten Abbildungssätze beziehen. Wir betrachten dazu einen Bereich von folgender Beschaffenheit: Er möge von der z_1-Ebene und von jeder zu ihr parallelen und nicht außerhalb verlaufenden Ebene in einem Kreise geschnitten werden, dessen Mittelpunkt auf der z_2-Ebene liegt; und umgekehrt möge er von der z_2-Ebene und jeder zu ihr parallelen nicht außerhalb verlaufenden Ebene in einem Kreise geschnitten werden, dessen Mittelpunkt auf der z_1-Ebene liegt. Einen solchen Bereich wollen wir einen *Kreisbereich* nennen. Er spielt bei analytischen Funktionen zweier Veränderlicher in mancher Beziehung dieselbe Rolle, wie der Kreis der z-Ebene bei Funktionen der einen Veränderlichen z. Besondere Kreisbereiche sind die vierdimensionale Kugel:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq r^2,$$

und der vierdimensionale Doppelzylinder:

$$|z_1| \leqq r_1, \qquad |z_2| \leqq r_2.$$

Über die Kreisbereiche gelten folgende Sätze:

Satz 16. *Jeder Kreisbereich wird durch die analytischen Drehungen:*

$$(10) \qquad \begin{aligned} w_1 &= e^{i v_1} \cdot z_1, \\ w_2 &= e^{i v_2} \cdot z_2 \end{aligned}$$

in sich transformiert.

Denn durch die Transformationen:

$$\begin{aligned} w_1' &= e^{i v_1} z_1, \qquad & w_1 &= w_1', \\ w_2' &= z_2, & w_2 &= e^{i v_2} \cdot w_2' \end{aligned}$$

wird jede zur z_1-Ebene bzw. zur z_2-Ebene parallele Ebene um ihren Schnittpunkt mit der Koordinatenebene in sich gedreht.

Aus diesem Satz folgt, daß mit jedem Punkte z_1, z_2, welcher der Oberfläche eines Kreisbereiches angehört, auch jeder Punkt $e^{i v_1} \cdot z_1$, $e^{i v_2} \cdot z_2$ auf dieser Oberfläche liegt. Damit ergibt sich der

Satz 17. *Jeder Kreisbereich geht durch Spiegelung an jeder absoluten Ebene in sich über.*

Er geht nämlich zunächst durch Spiegelung an der reellen Ebene in sich über, denn aus dem Punkte z_1, z_2 der Oberfläche wird bei einer solchen Spiegelung nach Satz 13, S. 225, der Punkt $\bar{z}_1 = e^{-2i\varphi_1} \cdot z_1$, $\bar{z}_2 = e^{-2i\varphi_2} \cdot z_2$. Jede absolute Ebene aber kann nach S. 225 durch eine Drehung (10) stets in die reelle Ebene übergeführt werden.

Satz 18. *Jeder Kreisbereich wird von jeder durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene in einem Kreise geschnitten.*

Denn nach Satz 16 geht jeder Kreisbereich durch jede Drehung:

$$w_1 = e^{i\psi} \cdot z_1,$$
$$w_2 = e^{i\psi} \cdot z_2$$

in sich über. Dabei wird aber nach S. 222 jede der fraglichen analytischen Ebenen in sich um den Winkel ψ gedreht, und da ψ beliebig ist, muß die Schnittfigur ein Kreis sein. Übrigens folgt offenbar entsprechend, daß die Schnittkreise, welche die Ebenen eines der S. 222 erwähnten Ebenenkränze erzeugen, sämtlich denselben Radius besitzen müssen.

Die Schnittbereiche, welche ein Kreisbereich mit den absoluten Ebenen bildet, sind alle kongruent, zentrisch symmetrisch zum Nullpunkt und spiegelbildlich zu den Schnittgeraden der absoluten Ebenen mit den Koordinatenebenen. Wir können uns jeden Kreisbereich dadurch entstanden denken, daß wir einen beliebigen, von den Achsen und einer Kurve, die von jeder zu den Achsen parallelen Geraden höchstens einmal geschnitten wird, begrenzten und im ersten Quadranten liegenden Bereich einer absoluten Ebene um beide Koordinatenebenen unabhängig je um den Winkel 2π rotieren lassen. Dabei wird jeder Punkt des Kreisbereiches einmal und (mit Ausnahme der Punkte auf den Koordinatenebenen) infolge von Satz 12, S. 224, auch nur einmal erhalten. Die Randkurve des rotierenden Bereiches wird durch eine funktionale Beziehung zwischen den absoluten Werten der Koordinaten dargestellt:

$$\Phi(|z_1|, |z_2|) = 0.$$

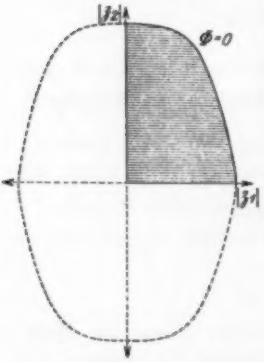

Fig. 1.

Den Schnittbereich eines Kreisbereiches mit einer absoluten Ebene, durch welchen umgekehrt der Kreisbereich eindeutig bestimmt ist, wollen wir seinen *Leitbereich* nennen (s. Fig. 1). Der Leitbereich der Kugel ist ein Kreis, derjenige des Doppelzylinders ein Rechteck.

Jeder Leitbereich und damit auch jeder Kreisbereich ist in bezug auf den Nullpunkt ein Stern, wie man sofort sieht. Dabei verstehen wir unter einem Stern in der üblichen Weise einen Bereich, der von jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden nur in einer Strecke geschnitten wird. Bei unseren späteren Betrachtungen (im II. und III. Teil) werden wir uns jedoch auf konvexe Kreisbereiche beschränken. Jeder konvexe Kreisbereich besitzt auch einen konvexen Leitbereich.

Wir beweisen noch folgende Sätze über die Transformation von Kreisbereichen:

Satz 19. *Jeder Kreisbereich geht durch jede Transformation von der Form*:

$$(11) \qquad \begin{aligned} w_1 &= R_1 \cdot z_1 \\ w_2 &= R_2 \cdot z_2 \end{aligned} \qquad (R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

in einen anderen Kreisbereich über:

Denn jede absolute Ebene geht bei einer solchen Abbildung in sich über, und alle Leitbereiche in diesen Ebenen werden auf dieselbe Weise ähnlich transformiert.

Satz 20. *Jeder Kreisbereich geht durch die Transformation*:

$$(12) \qquad \begin{aligned} w_1 &= z_2, \\ w_2 &= z_1 \end{aligned}$$

wieder in einen Kreisbereich über.

Denn diese Transformation stellt einfach eine Vertauschung der beiden Koordinatenebenen dar.

Alle Kreisbereiche, welche aus einem beliebigen durch die Transformationen (11) und (12), sowie die Kombinationen dieser Substitutionen (auch mit den Drehungen (10)) hervorgehen, bilden eine *Klasse von Kreisbereichen*. In jeder solchen Klasse kommen zwei Bereiche vor, deren Schnittkreise mit den Koordinatenebenen Einheitskreise sind. Einen dieser beiden Bereiche wollen wir als Repräsentanten einer solchen Klasse ansehen und ihren *Normalbereich* nennen.

Es kann auch der Fall eintreten, daß jene beiden Bereiche einer Klasse, die als Normalbereiche dienen können, identisch sind. Dann geht der Normalbereich durch die Transformation (12) in sich über. Einen solchen Bereich und jeden aus ihm durch die Ähnlichkeitstransformation $w_1 = R \cdot z_1$, $w_2 = R \cdot z_2$ hervorgehenden Bereich wollen wir einen *symmetrischen Kreisbereich* nennen. Der Leitbereich eines symmetrischen Kreisbereiches muß offenbar spiegelbildlich zu den beiden Diagonalen $|z_1| = |z_2|$

sein. Liegt umgekehrt ein solcher spiegelbildlicher Leitbereich vor, so ist der zugehörige Kreisbereich stets symmetrisch. So sind die Einheitskugel:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq 1$$

und der Einheitszylinder:

$$|z_1| \leqq 1, \qquad |z_2| \leqq 1$$

symmetrische Normalbereiche der zugehörigen Klassen. Eine sich auf einen symmetrischen Normalbereich aufbauende Klasse wollen wir kurz eine *symmetrische Klasse*, die zur Einheitskugel gehörige insbesondere die *Kugelklasse* nennen.

Für die Bereiche einer symmetrischen Klasse gilt der

Satz 21. *Jeder Kreisbereich einer symmetrischen Klasse wird durch eine Transformation von der Form:*

$$w_1 = R \cdot z_2 \qquad w_2 = \frac{1}{R} \cdot z_1 \qquad (R \text{ pos. reell})$$

in sich transformiert.

Denn ein solcher Bereich kann durch eine Substitution:

$$w_1 = R_1 \cdot z_1 \qquad w_2 = R_2 \cdot z_2 \qquad (R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

in den Normalbereich übergeführt werden, und dieser wird durch (12) auf sich selbst abgebildet. Dann wird $R = \frac{R_2}{R_1}$.

Ferner besteht der

Satz 22. *Jeder symmetrische Kreisbereich geht durch Spiegelung an jeder Diagonalebene in sich über.*

Sei die Diagonalebene durch den Parameter φ charakterisiert. Wir spiegeln an ihr dann zunächst eine Gerade $\varphi_1 =$ konst. der z_1-Ebene. Dazu legen wir durch sie diejenige stets existierende und durch die Parameterwerte φ_1, φ_2 charakterisierte absolute Ebene, welche die Diagonalebene schneidet, so daß also $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ ist. Infolge von Satz 15, S. 226, geht diese bei der Spiegelung in sich über, indem sie selbst an der Diagonalen $|z_1| = |z_2|$ gespiegelt wird. Aus jeder Geraden $\varphi_1 =$ konst. der z_1-Ebene wird bei der Spiegelung daher eine Gerade $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1 =$ konst. der z_2-Ebene und umgekehrt. Da gleichzeitig aus Ebenen wieder Ebenen werden, so geht jede absolute Ebene in eine andere oder sich selbst derart über, daß die Schnittlinien mit beiden Koordinatenebenen vertauscht werden. Dabei müssen aber die nach Voraussetzung spiegelbildlichen Leitbereiche ineinander und mithin der ganze Kreisbereich in sich übergehen.

Eine solche Spiegelung besitzt ersichtlich folgende Darstellung:

$$w_1 = e^{i\varphi} \cdot \bar{z}_2,$$
$$w_2 = e^{i\varphi} \cdot \bar{z}_1.$$

Wir notieren zum Schluß noch folgende Sätze:

Satz 23. *Die Einheitskugel wird durch jede analytische Drehung* ((3), (3_1), S. 214) *in sich transformiert.*

Satz 24. *Die Einheitskugel wird durch die linear gebrochenen analytischen Funktionen:*

$$w_1 = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c},$$
$$w_2 = \frac{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c}$$

mit den Bedingungen:

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 + |a|^2 + |b|^2 = |c_1|^2 + |c|^2,$$
$$|a_2|^2 + |b_2|^2 + |a|^2 + |b|^2 = |c_2|^2 + |c|^2,$$
$$a_1 \cdot \bar{a} + b_1 \cdot \bar{b} = c_1 \cdot \bar{c},$$
$$a_2 \cdot \bar{a} + b_2 \cdot \bar{b} = c_2 \cdot \bar{c},$$
$$a_1 \cdot \bar{a}_2 + b_1 \cdot \bar{b}_2 = c_1 \cdot \bar{c}_2$$

derart in sich transformiert, daß der Nullpunkt in den Punkt $w_1 = \frac{a}{c}$, $w_2 = \frac{b}{c}$ *übergeht.*

Man kann also stets eine umkehrbar eindeutige analytische Abbildung der Einheitskugel in sich angeben, welche einen beliebigen inneren Punkt der Kugel in den Nullpunkt überführt. Das Entsprechende gilt für den Einheitszylinder, denn es besteht der

Satz 25. *Der Einheitszylinder wird durch die linear gebrochenen analytischen Funktionen:*

$$w_1 = \frac{a_1 \cdot z_1 + b_1}{\bar{b}_1 \cdot z_1 + \bar{a}_1} \qquad (|a_1|^2 - |b_1|^2 > 0),$$
$$w_2 = \frac{a_2 \cdot z_2 + b_2}{\bar{b}_2 \cdot z_2 + \bar{a}_2} \qquad (|a_2|^2 - |b_2|^2 > 0)$$

derart in sich transformiert, daß der Nullpunkt in den Punkt $w_1 = \frac{b_1}{\bar{a}_1}$, $w_2 = \frac{b_2}{\bar{a}_2}$ *übergeht.*

Den Transformationen der Sätze 23, 24 und 25 entsprechende Abbildungen existieren natürlich für alle der Kugelklasse bzw. der Zylinderklasse angehörigen Kreisbereiche.

II. Teil.

Die Übertragung des Schwarzschen Lemmas und des Spiegelungsprinzips.

Es soll sich in diesem Teil um die Herleitung zweier Hilfssätze handeln, die als Übertragungen des Schwarzschen Lemmas und des Spiegelungsprinzips bei analytischen Funktionen einer Veränderlichen anzusehen sind und sich bei der Behandlung unserer Abbildungsprobleme ebenfalls als äußerst „zugkräftig" erweisen.

§ 1.

Das Lemma.

Wenn dem Kreis in der Ebene der Kreisbereich des analytischen Raumes entsprechen soll, werden wir erwarten können, einen dem Lemma entsprechenden Satz für Kreisbereiche zu erhalten. Wir beschränken uns dabei jedoch auf konvexe Bereiche. Dann besteht ein solcher Satz in der Tat und wir formulieren ihn folgendermaßen:

Satz 1. *Wird ein konvexer Kreisbereich so auf einen ganz in seinem Inneren gelegenen Bereich abgebildet, daß der Nullpunkt fest bleibt, so geht jeder in bezug auf den Nullpunkt zum Kreisbereich ähnliche Teilbereich ebenfalls in einen ganz seinem Inneren angehörenden Bereich über.*

Um diesen Satz zu beweisen, stellen wir zunächst eine Hilfsbetrachtung an. Wir denken uns einen beliebigen Kreisbereich und legen durch den Nullpunkt eine willkürliche analytische Ebene E_1. In dieser ziehen wir durch den Nullpunkt einen Strahl und konstruieren nun denjenigen zu diesem Strahl orthogonalen dreidimensionalen ebenen Raum, welcher zugleich Stützraum an den Kreisbereich ist und den Strahl im Punkte A schneiden möge (s. Fig. 2). Diese Konstruktion führen wir für jeden solchen Strahl aus und erhalten so eine Menge von Punkten A, die, wie wir behaupten, einen Kreis erfüllen muß. Dies ist klar, denn durch die Transformation:

$$w_1 = e^{i\psi}\cdot z_1,$$
$$w_2 = e^{i\psi}\cdot z_2$$

geht der Kreisbereich in sich über; jeder Stützraum bleibt dabei Stützraum, und der Punkt A dreht sich in der analytischen Ebene um den Winkel ψ, der gänzlich willkürlich war. Alle Stützräume umschließen also einen (vierdimensionalen) Kreiszylinder, der allgemein den Kreisbereich in den Schnittkreisen einer gewissen Menge analytischer durch den Nullpunkt gehender Ebenen trifft.

Jeder Stützraum kann nämlich mit dem Kreisbereich nur solche Punkte gemeinsam haben, die auf der Leitkurve derjenigen absoluten (den Stützraum in der Geraden g schneidenden) Ebene liegen, die den zugehörigen Strahl der Ebene E_1 enthält. Der Stützraum hat daher mit dem Kreisbereich genau so viele Punkte gemein wie die Gerade g mit der Leitkurve, und der Stützzylinder trifft mithin den Kreisbereich in den Schnittkreisen aller derjenigen durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebenen, die jene Punkte enthalten. Ist der Kreisbereich konvex, so gehört umgekehrt auch zu jedem seiner Begrenzungspunkte mindestens eine Ebene von der Beschaffenheit, daß der zugehörige Stützzylinderraum diesen Punkt enthält.

Die Funktionen, welche die Abbildung des Satzes 1 vermitteln, seien nun[9]):

$$(1)\quad \begin{aligned} w_1 &= a_{10} z_1 + a_{01} z_2 + a_{20} z_1^2 + a_{11} z_1 z_2 + a_{02} z_2^2 + \dots, \\ w_2 &= b_{10} z_1 + b_{01} z_2 + b_{20} z_1^2 + b_{11} z_1 z_2 + b_{02} z_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Unser Satz behauptet dann: Legen wir durch jeden inneren Punkt des Kreisbereichs einen (dreidimensionalen) Raum, der dem Grenzraum des Bereichs (mit dem Nullpunkt als Ähnlichkeitszentrum) ähnlich ist und den wir die durch den Punkt gehende „Schale“ nennen wollen, so verbleibt bei der Abbildung jeder Punkt innerhalb oder auf seiner Schale. Wir beweisen dies für einen beliebigen inneren Punkt $P(z_1, z_2)$ und legen zu diesem Zweck durch P die durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene E (Satz 6, S. 218), welche nach Satz 18, S. 228, von dem Kreisbereich in einem

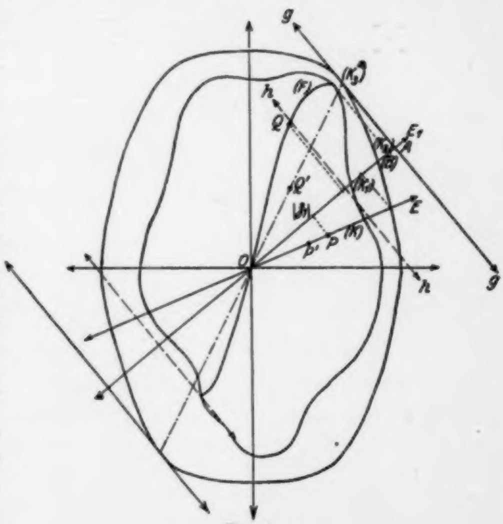

Fig. 2.

[9]) Wir benutzen hier und im folgenden, daß sich eine innerhalb eines konvexen Kreisbereiches reguläre Funktion in eine dort überall absolut konvergente Potenzreihe um den Mittelpunkt entwickeln läßt. Dies ergibt sich — ähnlich wie der entsprechende Satz über die Entwickelbarkeit einer innerhalb eines Kreises regulären Funktion einer Veränderlichen — sofort aus der Cauchyschen Integralformel für Funktionen zweier Veränderlicher.

Kreise K geschnitten wird (s. Fig. 2). Diese Kreisfläche K wird bei der Abbildung in ein durch den Nullpunkt gehendes analytisches Flächenstück F übergeführt, auf welchem der Bildpunkt $Q(w_1, w_2)$ von P liegt[10]). Wir legen ferner durch den Nullpunkt eine beliebige weitere analytische Ebene E_1 und projizieren sowohl F als auch K auf dieselbe. Der Projektionsbereich von F sei B, derjenige von K ein Kreis K_1[11]). Konstruieren wir nun zu der Ebene E_1 den oben erwähnten Stützzylinderraum, so muß B offenbar ganz innerhalb des Kreises K_2 liegen, welchen dieser Zylinder raum aus E_1 ausschneidet.

Nunmehr denken wir uns das Koordinatensystem analytisch so gedreht, daß die eine Koordinatenebene mit E_1 zusammenfällt. Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit Z_1, Z_2 bzw. W_1, W_2, so transformieren sich die Abbildungsfunktionen (1) in die Form:

$$\begin{aligned} W_1 &= A_{10} \cdot Z_1 + A_{01} \cdot Z_2 + \ldots, \\ W_2 &= B_{10} \cdot Z_1 + B_{01} \cdot Z_2 + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

In den neuen Koordinaten hat E die Gleichung $Z_2 = m \cdot Z_1$, und die Funktion:

$$W_1 = (A_{10} + m \cdot A_{01}) \cdot Z_1 + \ldots$$

bildet dabei offenbar den Kreis K_1 auf den Bereich B so ab, daß der Nullpunkt festbleibt und B ganz innerhalb des Kreises K_2 liegt. Wir können also auf diese Funktion das Schwarzsche Lemma der Ebene anwenden. Sind R_1 und R_2 bzw. die Radien der Kreise K_1 und K_2, so folgt daraus, daß stets:

$$|W_1| \leqq \frac{R_2}{R_1} \cdot |Z_1|$$

sein muß, d. h. daß der Bildpunkt Q innerhalb des mit dem Radius $\frac{R_2}{R_1} \cdot |Z_1|$ orthogonal zu E_1 konstruierten Stützzylinderraums (h in der Figur) liegen muß. Da nun die Ebene E_1 willkürlich war, so muß Q innerhalb sämtlicher derart zu konstruierenden Zylinder liegen. Nun ist aber $\frac{|Z_1|}{R_1} = \frac{OP}{R} = \lambda$ (R Radius des Kreises K) eine konstante, lediglich vom Punkte P abhängige Zahl. Daher gehen sämtliche Zylinder, deren gemeinsames Innere Q enthalten muß, aus den Stützzylinderräumen des

[10]) In der Figur ist angenommen, daß der Bildbereich zunächst noch so gedreht wurde, daß der Bildpunkt Q mit dem Punkt P in derselben absoluten Ebene liegt.

[11]) Nach P. H. Schouten, I. Teil, S. 73, 74 projiziert sich ein Kreis einer Ebene des vierdimensionalen Raumes dann und nur dann auf einer anderen schneidenden Ebene wieder als Kreis, wenn diese zwei gleiche Winkel mit der ersten bildet; vgl. also Satz 7, S. 219.

Kreisbereiches durch ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $\lambda : 1$ hervor. Sie umhüllen daher (und weil der Bereich konvex ist) einen dem Kreisbereich ähnlichen Teilbereich, dessen Grenzschale offenbar gerade durch P gehen muß. Da Q innerhalb dieses Bereiches liegen muß, so ist unser Satz damit bewiesen.

Wir sprechen zum Schlusse den Satz 1 für die Kugel noch einmal gesondert aus, und zwar in folgender Form:

Satz 1a. *Wird eine Kugel so auf einen ganz in ihrem Inneren gelegenen Bereich abgebildet, daß der Nullpunkt festbleibt, so kann die Entfernung irgendeines ihrer Punkte vom Nullpunkt nicht größer werden.*

§ 2.
Eine Vertiefung des Lemmas.

Wir fragen jetzt, was wir aussagen können, wenn bei der im vorigen Paragraphen behandelten Abbildung gewisse der Punkte auf den durch sie bestimmten Schalen bleiben, also nicht in deren Inneres rücken. Sei P' ein solcher Punkt und Q' sein Bildpunkt. Wir legen dann durch Q' die durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene, welche den Kreisbereich in einem Kreise K_2 schneidet, und konstruieren diejenige Ebene E_1 (oder eine derjenigen Ebenen), deren orthogonaler Stützzylinderraum den Kreisbereich gerade in diesem Schnittkreise trifft.

Für das Folgende wollen wir nur noch die Voraussetzung machen, daß der Stützraum mit dem Kreisbereich keine weiteren Punkte außer denen des Kreises K_2 gemein hat, oder, was dasselbe bedeutet, daß die Gerade g die Leitkurve nur in einem einzigen Punkte trifft. Dies wird immer dann der Fall sein, wenn der Punkt Q' im Inneren eines nicht geradlinigen Kurvenstückes oder auf einer durch zwei geradlinige Kurvenstücke gebildeten Ecke der durch ihn hindurchgehenden ähnlich verkleinerten Leitkurve liegt. Punkte von solcher Beschaffenheit wollen wir kurz *ordentliche Punkte* des Kreisbereiches nennen.

Wir fassen dann die Ebene E_1 wieder als Koordinatenebene auf und projizieren alles auf sie. Dann wird durch die Funktionen (2) der Kreis K_1 derart auf einen ganz im Inneren des Kreises K_2 liegenden Bereich B' abgebildet, daß ein Punkt W_1 gerade den absoluten Betrag $\frac{R_2}{R_1} \cdot |Z_1'|$ erhält; denn Q' liegt auf derselben Schale wie P', und der dieser Schale angehörige zu E_1 orthogonale Stützzylinderraum geht durch Q'. Daher muß nach dem Schwarzschen Lemma die Abbildung in der Ebene E_1 eine Drehstreckung mit dem Dehnungsverhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ sein. Dann müssen aber die Bildpunkte aller Punkte P der Ebene E auf den zugehörigen

Stützzylinderräumen liegen, und da sie gleichzeitig nicht außerhalb ihrer Schalen liegen dürfen, so liegen sie alle auf ihren Schalen, und zwar auf den Berührungskreisen der Stützzylinderräume mit denselben.

Da wir nun vorausgesetzt haben, daß jeder solche Raum seine Schale nur in einem Kreise trifft, so müssen die Bildpunkte Q gerade die durch Q' gehende analytische Ebene erfüllen, und diese Ebene muß aus der Ebene E durch Drehstreckung hervorgegangen sein. Wir haben daher den

Satz 2. *Bleibt bei der Abbildung, von welcher Satz* 1 *handelt, ein einziger Punkt auf seiner Schale, und ist sein Bildpunkt gleichzeitig ein ordentlicher Punkt, so geht die durch jenen und den Nullpunkt bestimmte analytische Ebene bei der Abbildung durch Drehstreckung in eine andere analytische Ebene über.*

Wir betrachten weiterhin eine den Bedingungen des Satzes 1 genügende Abbildung und nehmen an, daß wir von einer abzählbar unendlichen Menge von Punkten, von welchen keine zwei auf einer durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene liegen, wissen, daß sie auf ihren Schalen verbleiben, und daß ihre Bilder ordentliche Punkte des Kreisbereiches sind. Dann muß nach Satz 2 eine abzählbare Menge von analytischen Ebenen bei der Abbildung durch Drehstreckungen in eine andere solche Ebenenmenge übergeführt werden. Seien die Gleichungen jener Ebenen in der Form:

$$z_2 = m \cdot z_1$$

gegeben. Dann müssen also die Abbildungsfunktionen (1) für jede solche Ebene:

$$w_1 = (a_{10} + m \cdot a_{01}) \cdot z_1 + (a_{20} + m \cdot a_{11} + m^2 a_{02}) \cdot z_1^2 + \ldots,$$

$$w_2 = \left(\frac{1}{m} \cdot b_{10} + b_{01}\right) \cdot z_2 + \left(\frac{1}{m^2} \cdot b_{20} + \frac{1}{m} \cdot b_{11} + b_{02}\right) \cdot z_2^2 + \ldots$$

in Drehstreckungen übergehen, d. h. es muß für jedes derartige m:

$$a_{20} + m \cdot a_{11} + m^2 \cdot a_{02} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{m^2} \cdot b_{20} + \frac{1}{m} \cdot b_{11} + b_{02} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sein. Da diese Gleichungen aber für eine abzählbare Menge von Werten m bestehen müssen, so folgt:

$$a_{20} = a_{11} = a_{02} = \ldots = 0,$$

$$b_{20} = b_{11} = b_{02} = \ldots = 0,$$

d. h. die Abbildungsfunktionen (1) sind linear. Wir erhalten somit den

Satz 3. *Bleibt bei der Abbildung, von welcher Satz 1 handelt, jeder Punkt aus einer abzählbar unendlichen Menge von Punkten, von denen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen, auf seiner Schale, und zwar so, daß sein Bildpunkt ein ordentlicher Punkt ist, so müssen die Abbildungsfunktionen linear sein:*

$$w_1 = a_{10} \cdot z_1 + a_{01} \cdot z_2,$$
$$w_2 = b_{10} \cdot z_1 + b_{01} \cdot z_2.$$

§ 3.

Das Spiegelungsprinzip erster Art.

Das Spiegelungsprinzip bei Funktionen zweier Veränderlicher entspricht vollkommen dem bekannten Spiegelungsprinzip der Ebene. Wir sprechen es zunächst in folgender Form aus:

Satz 4. *Führt eine Abbildung ein Stück der reellen Ebene wieder in ein Stück dieser Ebene über, so werden aus zur reellen Ebene spiegelbildlichen Punkten wieder spiegelbildliche Punkte.*

Zum Beweise bedenken wir, daß nach Satz 13, S. 225, einen Punkt an der reellen Ebene spiegeln heißt, seinen Koordinaten die konjugierten Werte erteilen. Wir geben nun z_2 irgendeinen festen reellen Wert aus dem betreffenden Ebenenstück. Dann nehmen die beiden Funktionen:

$$w_1 = (a_{00} + a_{01} \cdot z_2 + \ldots) + (a_{10} + a_{11} \cdot z_2 + \ldots) \cdot z_1 + \ldots,$$
$$w_2 = (b_{00} + b_{01} \cdot z_2 + \ldots) + (b_{10} + b_{11} \cdot z_2 + \ldots) \cdot z_1 + \ldots,$$

welche die Abbildung vermitteln mögen, längs eines Stückes der reellen Achse von z_1 reelle Werte an. Dann müssen sie aber nach dem Spiegelungsprinzip der Ebene reelle Koeffizienten haben. Dies gilt wieder für eine kontinuierliche Menge von Werten von z_2. Für alle diese Werte müssen also die Funktionen:

$$a_{00} + a_{01} \cdot z_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$b_{00} + b_{01} \cdot z_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

reelle Werte annehmen. Daher müssen sie selbst reelle Koeffizienten haben. Dann sind aber sämtliche Koeffizienten der ursprünglichen Funktionen reell und diese nehmen mithin für konjugierte Werte von z_1, z_2 konjugierte Werte von w_1, w_2 an.

Wir erweitern das Spiegelungsprinzip noch in folgendem

Satz 5. *Führt eine Abbildung ein Stück einer aus der reellen Ebene durch analytische Drehung oder Parallelverschiebung hervorgehen-*

den nichtanalytischen Ebene in ein Stück einer ebensolchen Ebene über, so werden aus zur einen Ebene spiegelbildlichen Punkten spiegelbildliche Punkte der anderen Ebene.

Dies folgt sofort aus Satz 4, wenn man berücksichtigt, daß analytische Drehungen und Parallelverschiebungen spiegelbildliche Punkte ebenfalls wieder in spiegelbildliche Punkte überführen. Da keineswegs sämtliche nichtanalytischen Ebenen aus der reellen Ebene durch analytische Drehungen erzeugt werden können, so ist das Spiegelungsprinzip auch nicht für alle nichtanalytischen Ebenen bewiesen. Wohl aber gilt es insbesondere für die absoluten Ebenen, da dieselben durch analytische Drehungen aus der reellen Ebene hervorgehen.

III. Teil.

Die Abbildungsprobleme.

Es sollen in diesem Teil nun diejenigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen zweier konvexer Kreisbereiche aufeinander untersucht werden, welche den Nullpunkt festlassen. Da die beiden Kreisbereiche auch identisch sein können, so handelt es sich gleichzeitig um die Betrachtung der umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines konvexen Kreisbereiches mit festem Mittelpunkt in sich.

§ 1.

Ein Hilfssatz.

p, q, r, s seien beliebig gegebene Größen und m eine gesuchte komplexe Zahl. Wir fragen nach der Zahl der Lösungen von:

$$p \cdot m \cdot \overline{m} + q \cdot m + r \cdot \overline{m} + s = 0. \tag{1}$$

Wir vereinigen die Gleichung (1) mit ihrer konjugierten:

$$\overline{p} \cdot m \cdot \overline{m} + \overline{r} \cdot m + \overline{q} \cdot \overline{m} + \overline{s} = 0$$

und eliminieren $\overline{m}$ aus beiden. Das führt zu:

$$(p \cdot \overline{r} - \overline{p} \cdot q) \cdot m^2 + (|r|^2 - |q|^2 + p \cdot \overline{s} - \overline{p} \cdot s) \cdot m + (r \cdot \overline{s} - q \cdot s) = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für m, die höchstens zwei verschiedene Wurzeln besitzt, falls nicht alle Koeffizienten verschwinden. Also kann in diesem Fall auch die Gleichung (1) höchstens zwei Lösungen haben.

Verschwindet aber die linke Seite der quadratischen Gleichung identisch:

$$p \cdot \overline{r} - \overline{p} \cdot q = 0,$$
$$|r|^2 - |q|^2 + p \cdot \overline{s} - \overline{p} \cdot s = 0,$$
$$r \cdot \overline{s} - \overline{q} \cdot s = 0,$$

so folgt:

$$(2)\qquad \begin{cases} |q| = |r|, \\ \operatorname{arc} p = \begin{cases} \operatorname{arc} s \quad \text{oder:} \\ \operatorname{arc} s + \pi, \end{cases} \\ 2 \operatorname{arc} p = \operatorname{arc} q + \operatorname{arc} r. \end{cases}$$

Diese Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn wir setzen:

$$p = r_1 \cdot e^{i\varphi}, \qquad q = r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)},$$
$$s = \pm r_3 \cdot e^{i\varphi}, \qquad r = r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)},$$

und Gleichung (1) erhält hiermit die Form:

$$r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot |m|^2 + r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \cdot m + r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \cdot \overline{m} \pm r_3 \cdot e^{i\varphi} = 0,$$

oder:

$$(3)\qquad r_1 \cdot |m|^2 + \varrho \cdot m + \overline{\varrho} \cdot \overline{m} \pm r_3 = 0,$$

worin r_1 und r_3 positiv reell und

$$\varrho = r_2 \cdot e^{i\psi}$$

ist. Wir können also der gegebenen Gleichung (1) in diesem Fall stets die Form der Gleichung (3) geben, die mit ihrer konjugierten Gleichung identisch ist. Liegt umgekehrt eine Gleichung (1) vor, welche auf eine Form gebracht werden kann, die mit der konjugierten übereinstimmt, so ist diese Form die in (3) vorliegende und die linke Seite der zugehörigen quadratischen Gleichung verschwindet somit identisch.

Gleichung (3) läßt sich aber leicht auflösen. Ist zunächst $r_1 \neq 0$, so schreiben wir:

$$|r_1 \cdot m + \overline{\varrho}|^2 - \Delta = 0,$$

wobei:

$$\Delta = |\varrho|^2 \mp r_1 \cdot r_3$$

gesetzt ist. Dann folgt:

$$m = \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ |\sqrt{\Delta}| \cdot e^{i \cdot \lambda} - \overline{\varrho} \right\},$$

wenn $\Delta > 0$ ist. λ ist dabei ein veränderlicher Parameter. In diesem Falle besitzt die Gleichung also eine einparametrige Schar von Lösungen, welche einen Kreis mit dem Mittelpunkt $-\frac{\overline{\varrho}}{r_1}$ und dem Radius $\frac{|\sqrt{\Delta}|}{r_1}$ erfüllen. Ist $\Delta = 0$, so ist die Lösung eindeutig bestimmt. Ist $\Delta < 0$, so existiert überhaupt keine Lösung.

Ist ferner $r_1 = 0$, aber $\varrho \neq 0$, so folgt aus:

$$\varrho \cdot m + \overline{\varrho} \cdot \overline{m} \pm r_3 = 0$$

sofort:

$$R(\varrho \cdot m) = \mp \tfrac{1}{2} r_3.$$

Auch in diesem Falle besitzt die Gleichung daher eine einparametrige Schar von Lösungen, die hier eine Gerade erfüllen.

Wir erhalten damit den folgenden

Hilfssatz. *Bei der Auflösung der komplexen Gleichung* (1) *können zwei Fälle eintreten.*

I. *Die Bedingungen* (2) *sind nicht erfüllt. Dann besitzt sie höchstens zwei Lösungen.*

II. *Die Bedingungen* (2) *sind erfüllt. Dann besitzt sie*

1. *eine einparametrige Schar von Lösungen, die einen Kreis oder eine Gerade erfüllen, wenn* $\Delta > 0$ *und je nachdem* $r_1 \neq 0$ *oder* $r_1 = 0$ *ist;*
2. *eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn* $\Delta = 0$ *und* $r_1 \neq 0$ *ist;*
3. *keine Lösung, wenn* $\Delta < 0$ *oder* $\Delta = 0$ *und* $r_1 = 0$, *also auch* $\varrho = 0$, *aber* $r_2 \neq 0$ *ist.*

§ 2.
Vorbereitende Betrachtungen über die Abbildungen eines Kreisbereiches in sich.

Wir beweisen jetzt einige Sätze über diejenigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines konvexen Kreisbereiches in sich, die den Mittelpunkt festlassen; diese Sätze werden wir später anwenden.

Zunächst muß bei einer solchen Abbildung jede der früher erwähnten Schalen in sich übergehen, denn würde ein Punkt ins Innere rücken, so müßte sein Bildpunkt bei der umgekehrten Abbildung ins Äußere seiner Schale treten, was nach Satz 1 des II. Teils, S. 232, unmöglich ist. Daher bleiben sämtliche Punkte auf ihren Schalen.

Da nun die totale Leitkurve eines konvexen Kreisbereichs mindestens ein nicht geradliniges Kurvenstück oder eine Ecke, also mindestens einen ordentlichen Punkt enthält, so gibt es bei einer den Nullpunkt festlassenden Abbildung eines solchen Kreisbereiches in sich mindestens einen Punkt, der auf seiner Schale bleibt und in einen ordentlichen Punkt Q übergeht, und, falls die Leitkurve nicht gerade eine einen Punkt der $|z_1|$-Achse mit einem Punkt der $|z_2|$-Achse verbindende geradlinige Strecke ist, auch unendlich viele solcher Punkte, von denen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen. Denn wird der Bildpunkt Q den Drehungen $w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1$, $w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2$ unterworfen, so befinden sich unter den neu entstandenen (ebenfalls ordentlichen) Punkten unendlich viele, von welchen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen, und diese sind die Bilder solcher Punkte, die offenbar (wegen Satz 2) die gleiche Eigenschaft besitzen müssen. Dann können wir aber auf solche

Abbildungen den Satz 3 des II. Teils, S. 237, anwenden und finden, daß sie nur durch lineare Funktionen vermittelt werden können.

Wir wollen für diesen Satz noch einen zweiten Beweis geben, der gleichzeitig den eben ausgenommenen Fall mit umfaßt. Da bei jeder der in Rede stehenden Abbildungen jede Schale in sich übergehen muß, so müssen mit den abbildenden Funktionen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{20}z_1^2 + a_{11}z_1z_2 + a_{02}z_2^2 + \dots, \\ w_2 &= b_{10}z_1 + b_{01}z_2 + b_{20}z_1^2 + b_{11}z_1z_2 + b_{02}z_2^2 + \dots \end{aligned}$$

auch sämtliche Funktionen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + \lambda\cdot(a_{20}z_1^2 + a_{11}z_1z_2 + a_{02}z_2^2) + \dots, \\ w_2 &= b_{10}z_1 + b_{01}z_2 + \lambda\cdot(b_{20}z_1^2 + b_{11}z_1z_2 + b_{02}z_2^2) + \dots \end{aligned}$$

für $0 < |\lambda| < 1$ eine den Nullpunkt festlassende Abbildung des betr. Kreisbereichs in sich vermitteln. Wir beweisen nun, daß die Koeffizienten sämtlicher Potenzen von λ in beiden Funktionen (5) mindestens für eine abzählbar unendliche Menge von Punkten z_1, z_2, von welchen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen, verschwinden müssen. Wenn dies gezeigt ist, folgt sofort, daß alle Koeffizienten $a_{20} = a_{11} = a_{02} = \dots = b_{20} = b_{11} = b_{02} = \dots = 0$ und die Funktionen (4) daher linear sind.

Um den erwähnten Nachweis zu führen, greifen wir aus den Abbildungen (5) eine beliebige zum Parameter λ_0 gehörige heraus. Diese bildet jeden Punkt $P(z_1, z_2)$ auf einen Punkt Q_0 ab, zu welchem wir uns diejenige oder eine derjenigen analytischen Ebenen E_1 konstruiert denken, deren orthogonaler Stützzylinderraum die zu P und Q_0 gehörige Schale in solchen Punkten berührt, unter denen sich Q_0 befindet. Insbesondere interessieren uns diejenigen Punkte P, für welche die zugehörige Ebene E_1 nicht mit einer Koordinatenebene zusammenfällt.

Wir behaupten zunächst, daß es mindestens eine abzählbar unendliche Menge solcher Punkte geben muß, von welchen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen. Dies ist klar. Denn entweder ist der Leitbereich des Kreisbereiches kein Rechteck; dann enthält die Leitlinie ein ganzes Kurvenstück, dessen sämtliche Punkte solche Punkte Q_0 sind, deren Ebenen E_1 keine Koordinatenebenen sind. Oder der Leitbereich ist ein Rechteck; dann gibt es auf der Leitlinie zwar nur einen solchen Punkt Q_0, nämlich die Ecke des Rechtecks, aber die aus diesem durch die Drehungen $w_1 = e^{i\varphi_1}\cdot z_1$, $w_2 = e^{i\varphi_2}\cdot z_2$ hervorgehenden Punkte haben sämtlich die gleiche Eigenschaft. Und alle diese Punkte müssen bei der Abbildung aus Punkten P hervorgegangen sein, die keiner endlichen Zahl von durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebenen angehört haben können, da sie ein zweidimensionales Kontinuum. bilden

Wir behaupten ferner, daß die Koeffizienten von λ^i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ in (5) für alle diese Punkte P verschwinden müssen. Denn nehmen wir an, daß gewisse dieser Koeffizienten für einen bestimmten Punkt P von Null verschieden seien. Wir drehen dann das Koordinatensystem so, daß die neue Z_1-Koordinatenebene mit der zu P gehörigen Ebene E_1 zusammenfällt. Sind die neuen Koordinaten wieder Z_1, Z_2 bzw. W_1, W_2, so nehmen die Funktionen (5) durch die Drehungen:

$$z_1 = a_1 \cdot Z_1 + a_2 \cdot Z_2, \qquad W_1 = \bar{a}_1 \cdot w_1 + \bar{b}_1 w_2,$$
$$z_2 = b_1 \cdot Z_1 + b_2 \cdot Z_2, \qquad W_2 = \bar{a}_2 \cdot w_1 + \bar{b}_2 w_2$$

die Form:

$$W_1 = A_0 + \lambda \cdot A_1 + \lambda^2 \cdot A_2 + \ldots,$$
$$W_2 = B_0 + \lambda \cdot B_1 + \lambda^2 \cdot B_2 + \ldots$$

an, in welcher je zwei Koeffizienten A_i, B_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ homogene lineare Funktionen der Koeffizienten von λ^i in den Entwicklungen (5) sind. Da aber die Determinante $\bar{a}_1 \bar{b}_2 - \bar{b}_1 \bar{a}_2$ eines solchen linearen Funktionspaares nicht verschwindet, so sind beide Koeffizienten von λ^i $(i = 1, 2, \ldots)$ in (5) dann und nur dann gleich Null, wenn A_i und B_i verschwinden, d. h. infolge der eingangs gemachten Annahme sind W_1 und W_2 in bezug auf λ nicht beide konstant. Dies ist aber unmöglich. Denn wäre zunächst W_1 von λ abhängig, so würden in der Umgebung von λ_0 Werte von λ existieren, für welche $|W_1| > |W_1^0|$ wäre, und dies kann nicht sein, da der Punkt P von zu solchen Werten λ gehörigen Abbildungsfunktionen (5) offenbar aus seiner Schale gerückt würde. Also muß $W_1 = A_0$ sein. Nun berührt aber die in dem betr. Punkte W_1 auf der W_1-Koordinatenebene errichtete orthogonale analytische Ebene die fragliche Schale höchstens in einer Strecke. Denn sie kann mit der Schale nicht mehr Punkte gemeinsam haben, als der orthogonale Stützraum, dem sie angehört. Von diesem wissen wir aber (siehe S. 233), daß er die Schale nur in den Punkten einer Leitlinie, d. h. höchstens in einer Strecke, trifft[12]). Deshalb muß nun auch W_2 von λ unabhängig sein, da andernfalls eine volle Umgebung von λ_0 auf eine volle Umgebung von W_2^0 abgebildet würde, und daher Funktionen (5) existieren müßten, welche den Punkt P außerhalb jener Berührungsstrecke, also auch außerhalb der Schale abbilden würden. Nach den anfänglichen Bemerkungen ist der Beweis damit vollständig geführt.

---

[12]) Hier wird die Voraussetzung benutzt, daß die Ebene E_1 nicht mit einer der ursprünglichen Koordinatenebenen identisch ist. Denn sonst wird die fragliche Leitlinie unbestimmt, da die zugehörige absolute Ebene unbestimmt wird, und aus der Strecke wird daher in diesem Fall ein Kreis.

Wir haben also den

Satz 1. *Jede umkehrbar eindeutige Abbildung eines konvexen Kreisbereiches auf sich, welche den Mittelpunkt festläßt, wird durch ganze lineare Funktionen vermittelt:*

$$(6)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2, \\ w_2 &= b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2. \end{aligned}$$

Nach diesem Satz lassen sich wohl für die einzelnen konvexen Kreisbereiche genau diejenigen den Nullpunkt festlassenden umkehrbar eindeutigen Abbildungen ausfindig machen, die den Kreisbereich in sich überführen, da die Eigenschaften der durch lineare Funktionen vermittelten Abbildungen leicht aufgestellt werden können. Diese Untersuchung soll jedoch hier nicht durchgeführt werden, da wir die sich dabei ergebenden Resultate später auf anderem Wege sowieso erhalten werden. Wir greifen jetzt lediglich eine bestimmte Gruppe der Abbildungen (6) heraus und untersuchen nur diese; das Ergebnis wird im folgenden gebraucht werden.

Es handele sich um diejenigen Drehungen, welche die reelle Ebene festlassen, oder, wie wir kurz sagen wollen, um *die reellen Drehungen:*

$$(7)\qquad \begin{aligned} w_1 &= \cos\alpha \cdot z_1 - \sin\alpha \cdot z_2, \\ w_2 &= \sin\alpha \cdot z_1 + \cos\alpha \cdot z_2. \end{aligned}$$

Über diese gilt der

Satz 2. *Eine reelle Drehung führt einen Kreisbereich nur in folgenden Fällen in sich über:*

I. *Bei einem beliebigen Kreisbereich für* $\alpha = 0$ *und* $\alpha = \pi$.

II. *Bei einem symmetrischen Kreisbereich außerdem für* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *und* $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

III. *Bei der Kugel außerdem für beliebiges* α.

Daß in den genannten Fällen der betr. Kreisbereich in der Tat in sich übergeht, ist teils evident, teils folgt es aus den Sätzen 21 und 23 des I. Teils, S. 230, 231. Daß ein nicht symmetrischer Kreisbereich für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ nicht in sich transformiert werden kann, ist ebenfalls klar. Wir nehmen nun an, daß $\alpha \neq 0$, $\neq \frac{\pi}{2}$, $\neq \pi$, $\neq \frac{3\pi}{2}$ ist. Wir betrachten dann einen Punkt $z_1 = r_1$, $z_2 = r_2$ der reellen Ebene, der auf der Oberfläche des Kreisbereiches und auf keiner reellen Achse liegt, so daß also $r_1 \neq 0$ und $r_2 \neq 0$ ist. Dann liegen auch sämtliche Punkte $z_1' = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2' = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ auf der Oberfläche des Bereichs. Alle diese Punkte bilden

wir durch (7) ab. Die Bildpunkte müssen alle wieder auf der Oberfläche liegen. Wenn wir jeden Bildpunkt w_1', w_2' durch eine Substitution $\omega_1 = e^{i\varphi_1} \cdot w_1$, $\omega_2 = e^{i\varphi_2} \cdot w_2$ in die reelle Ebene drehen, so muß er dort auf die Leitkurve fallen. Nun haben alle Punkte z_1', z_2' denselben Abstand vom Nullpunkt und behalten ihn bei den in Frage kommenden Drehungen auch bei. Also muß die Leitkurve an allen den Stellen vom Nullpunkt gleich weit entfernt sein, an denen gedrehte Bildpunkte ω_1', ω_2' zu liegen kommen. Wir werden nun zeigen, daß solche Punkte in beliebiger Nähe des Ausgangspunktes r_1, r_2 liegen müssen. Da dieser selbst beliebig war, müssen alle Punkte der Leitkurve vom Nullpunkt gleich weit entfernt, d. h. dieser muß ein Kreis sein.

Nun bildet der Radiusvektor des Punktes r_1, r_2 mit der reellen Achse der z_1 einen Winkel β, der sich aus der Gleichung $\operatorname{tg}\beta = \frac{r_2}{r_1}$ ergibt. Der Radiusvektor des gedrehten Bildpunktes ω_1', ω_2' des Punktes z_1', z_2' aber bildet mit derselben Achse einen Winkel γ, der aus der Beziehung $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{|w_2'|}{|w_1'|}$ folgt. Nun findet man mit Hilfe von (7) die Relation:

$$\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{\sin^2\alpha \cdot |z_1'|^2 + \cos^2\alpha \cdot |z_2'|^2 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(z_1'\cdot\bar{z}_2' + \bar{z}_1'\cdot z_2')}{\cos^2\alpha \cdot |z_1'|^2 + \sin^2\alpha \cdot |z_2'|^2 - \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(z_1'\cdot\bar{z}_2' + \bar{z}_1'\cdot z_2')},$$

oder wegen $\operatorname{tg}\beta = \frac{|z_2'|}{|z_1'|}$:

$$\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta - 2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Lassen wir nun hierin $\varphi_2 - \varphi_1$ stetig von 0 bis π variieren, so variiert γ offenbar stetig zwischen zwei Werten γ_1 und γ_2, die sich aus den Gleichungen:

$$\gamma_1 = \beta + \alpha, \qquad \gamma_2 = \beta - \alpha$$

ergeben, allerdings nur dann, wenn $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ und $\operatorname{tg}\alpha \neq \infty$ ist; dies war aber vorausgesetzt. Nach unseren anfänglichen Ausführungen ist Satz 2 damit bewiesen.

Wir behandeln nunmehr auf Grund unserer seitherigen Überlegungen folgende Frage: Es sei eine unendliche Folge von Punkten z_1, z_2 eines Kreisbereiches gegeben, von denen keine zwei in einer durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene liegen. Wir fragen nach denjenigen linearen Abbildungen (6), die den Kreisbereich in sich überführen und dabei zugleich jene unendlich vielen Punkte einzeln in ihre zur reellen Ebene spiegelbildlichen konjugierten Punkte transformieren. Das Ergebnis dieser Untersuchung wird im folgenden Paragraphen angewendet werden.

Wir schicken zunächst voraus, daß für die Funktionen (6) $|a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = 1$ sein muß. Denn es ist:

$$dw_1 \cdot dw_2 = \begin{vmatrix} \frac{dw_1}{dz_1} & \frac{dw_1}{dz_2} \\ \frac{dw_2}{dz_1} & \frac{dw_2}{dz_2} \end{vmatrix} \cdot dz_1 \cdot dz_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot dz_1 \cdot dz_2,$$

und deshalb ergibt sich für die Transformation der (vierdimensionalen) Volumenelemente:

$$dw_1 \cdot \overline{dw_1} \cdot dw_2 \cdot \overline{dw_2} = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|^2 \cdot dz_1 \cdot \overline{dz_1} \cdot dz_2 \cdot \overline{dz_2}.$$

Da nun in unserem Falle das Volumen des Kreisbereichs bei der Abbildung erhalten bleiben muß, so folgt in der Tat:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\| = 1.$$

Soll nun (6) den Punkt z_1, z_2 in den Punkt $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ überführen, so muß $m = \frac{z_2}{z_1}$ in $\overline{m} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$ übergehen, d. h. jede durch einen der gegebenen Punkte und den Nullpunkt gehende analytische Ebene muß in die konjugierte Ebene transformiert werden. Da keine zwei der gegebenen Punkte in einer solchen Ebene liegen sollten, so muß es unendlich viele Werte m geben, die durch (6) in die konjugierten Werte $\overline{m}$ übergeführt werden, d. h. es muß für unendlich viele m:

$$\frac{b_1 + m \cdot b_2}{a_1 + m \cdot a_2} = \overline{m},$$

oder:

$$a_2 \cdot |m|^2 - b_2 \cdot m + a_1 \cdot \overline{m} - b_1 = 0$$

sein. Dies ist aber eine Gleichung von der in § 1 betrachteten Form. Nach dem Hilfssatz, S. 240, besitzt sie nur dann unendlich viele Lösungen, wenn man:

$$a_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi}, \qquad b_2 = -r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)},$$
$$b_1 = \mp r_3 \cdot e^{i\varphi}, \qquad a_1 = r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)}$$

setzen kann. Die dort mit Δ bezeichnete Größe wird hier:

$$\Delta = r_2^2 \mp r_1 \cdot r_3 = \mp |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = \mp 1,$$

und da im Falle $\Delta < 0$ überhaupt keine Lösuug vorhanden ist, so folgt für das obere Zeichen $r_2^2 > r_1 \cdot r_3$ und stets:

$$|a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = r_2^2 \mp r_1 \cdot r_3 = 1.$$

Die einzig möglichen Fälle linearer Abbildungen, die unserer Bedingung genügen, sind also die folgenden:

$$(8)\qquad \begin{aligned} w_1 &= r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \cdot z_1 + r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2, \\ w_2 &= \mp r_3 \cdot e^{i\psi} \cdot z_1 - r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \cdot z_2. \end{aligned}$$

Nunmehr ziehen wir in Betracht, daß die vorgelegten Funktionen den Kreisbereich in sich überführen sollen. Falls $r_1 \neq 0$ und $r_3 \neq 0$ ist, betrachten wir noch denjenigen Kreisbereich derselben Klasse, welcher nach Satz 19 des I. Teils, S. 229, durch die Substitution:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{|\sqrt{r_1}|} \cdot z_1, \\ \zeta_2 &= \frac{1}{|\sqrt{r_3}|} \cdot z_2 \end{aligned}$$

aus dem vorliegenden hervorgeht. Auf diesen Kreisbereich wenden wir die Abildung:

$$(9_1)\qquad \begin{aligned} z_1 &= |\sqrt{r_1}| \cdot e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \cdot \zeta_1, \\ z_2 &= |\sqrt{r_3}| \cdot e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \zeta_2 \end{aligned}$$

an, die ihn in den gegebenen überführt, diesen transformieren wir durch (8) in sich und dann durch die Abbildung:

$$(9_2)\qquad \begin{aligned} w_1 &= |\sqrt{r_1}| \cdot e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \cdot \omega_1, \\ w_2 &= |\sqrt{r_3}| \cdot e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \omega_2 \end{aligned}$$

wieder rückwärts auf den neuen Bereich. Dann liefert offenbar:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \omega_1 &= r_2 \cdot \zeta_1 + r \cdot \zeta_2 \\ \omega_2 &= \mp r \cdot \zeta_1 - r_2 \cdot \zeta_2 \end{aligned} \qquad (|\sqrt{r_1 \cdot r_3}| = r)$$

eine Abbildung jenes neuen Bereiches in sich, durch welche infolge der Beziehungen:

$$\frac{w_1}{\omega_1} = \frac{\bar z_1}{\bar\zeta_1}, \qquad \frac{w_2}{\omega_2} = \frac{\bar z_2}{\bar\zeta_2}$$

diejenige Punktmenge ζ_1, ζ_2 in die konjugierte übergeführt wird, die vermöge der Substitutionen (9_1) aus der durch (8) in die konjugierte transformierten Punktmenge z_1, z_2 hervorgeht. Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem in (10) das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

Gilt das obere Zeichen, so müssen auch die Funktionen:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= r_2 \cdot \zeta_1 + r \cdot \zeta_2, \\ \omega_2 &= r \cdot \zeta_1 + r_2 \cdot \zeta_2 \end{aligned}$$

den Kreisbereich in sich transformieren. Dies ist aber unmöglich, da sie eine ungleichmäßige Dehnung darstellen, bei welcher das Quadrat des Dehnungsverhältnisses für alle Geraden $|\zeta_2| = \lambda \cdot |\zeta_1|$ $(0 \leqq \lambda \leqq \infty)$ der reellen Ebene:

$$\frac{(r_2 + \lambda \cdot r)^2 + (r + \lambda \cdot r_2)^2}{1+\lambda^2} = r_2^2 + r^2 + \frac{4\, r_2 \cdot r \cdot \lambda}{1+\lambda^2},$$

also wegen $r_2^2 - r^2 = 1$ und $r \neq 0$ größer als Eins ist.

Gilt das untere Zeichen, so bilden auch die Funktionen:

$$\omega_1 = r_2 \cdot \zeta_1 - r \cdot \zeta_2,$$
$$\omega_2 = r \cdot \zeta_1 + r_2 \cdot \zeta_2$$

den Kreisbereich auf sich ab. Diese Funktionen stellen aber wegen $r_2^2 + r^2 = 1$ eine reelle Drehung dar, und wir können daher jetzt Satz 2, S. 243, anwenden. Infolge $r \neq 0$ kommen hier nur die Fälle in Betracht, daß unser Kreisbereich ein symmetrischer oder eine Kugel ist.

Im ersten Fall lauten die Transformationen (10):

$$\omega_1 = \zeta_2, \qquad \omega_1 = -\zeta_2,$$
$$\omega_2 = \zeta_1, \qquad \omega_2 = -\zeta_1,$$

und die zugehörigen Transformationen (8):

$$w_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2, \qquad w_1 = -r_1 \cdot e^{i\varphi'} \cdot z_2,$$
$$w_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1, \qquad w_2 = -r_2 \cdot e^{i\varphi'} \cdot z_1,$$

wobei $r_1 \cdot r_2 = 1$ ist. Um die Punktmenge zu finden, welche durch diese Abbildungen Punkt für Punkt in die konjugierte übergeführt wird, setzen wir $z_1 = \varrho_1 \cdot e^{i\psi_1}$, $z_2 = \varrho_2 \cdot e^{i\psi_2}$, und erhalten, wie man sofort sieht $(\varphi' + \pi = \varphi)$:

$$\varrho_1 = r_1 \cdot \varrho_2, \quad \varrho_2 = r_2 \cdot \varrho_1, \qquad \psi_1 + \psi_2 = -\varphi.$$

Diese Punktmenge erfüllt eine nichtanalytische Ebene von der Gleichung:

$$\frac{|\sqrt{r_2}|}{|\sqrt{r_1 + r_2}|} \cdot z_1 - \frac{|\sqrt{r_1}|}{|\sqrt{r_1 + r_2}|} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \bar{z}_2 = 0.$$

Ist der Kreisbereich selbst symmetrisch, so muß $r_1 = r_2 = 1$ sein; in diesem Falle erfüllt die Punktmenge die Diagonalebene (s. S. 226):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \bar{z}_2 = 0.$$

Im zweiten Fall beschränken wir uns im wesentlichen auf die Kugel selbst. Die Transformationen (8) lauten dann:

$$w_1 = r_2 \cdot e^{i(\varphi - \psi)} \cdot z_1 + r \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2,$$
$$w_2 = r \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1 - r_2 \cdot e^{i(\varphi + \psi)} \cdot z_2,$$

wobei $r_2^2 + r^2 = 1$ ist. Sie stellen eine doppelte Drehung um zwei zueinander orthogonale Ebenen $z_2 = \lambda_1 \cdot z_1$ und $z_2 = \lambda_2 \cdot z_1$ dar, deren Neigungen λ_1 und λ_2 sich als Wurzeln der Gleichung mit reellen Koeffizienten:

$$r \cdot \lambda^2 + r_2 \cdot (e^{-i\psi} + e^{i\psi}) \cdot \lambda - r = 0$$

ergeben. Da die Determinante:

$$r_2^2 \cdot (e^{-i\psi} + e^{i\psi})^2 + 4\, r^2$$

positiv ist, so haben wir stets zwei reelle Lösungen. Die beiden Drehungsebenen gehen also aus den Koordinatenebenen durch eine reelle Drehung hervor. Hier erfüllt daher die Punktmenge, welche durch die Abbildung Punkt für Punkt in die konjugierte übergeht, offenbar gerade eine nichtanalytische Ebene, die durch jene reelle Drehung aus einer absoluten Ebene hervorgeht. Alle diese Ebenen bilden eine dreiparametrige Ebenenschar.

Bei einem beliebigen Kreisbereich der Kugelklasse, der aus einer Kugel durch die Substitution:

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} z_1 &= \left|\sqrt{\frac{r_3}{r}}\right| \cdot z_1', \\ z_2 &= \left|\sqrt{\frac{r_1}{r}}\right| \cdot z_2' \end{aligned} \qquad \left(\left|\sqrt{\frac{r_3}{r}}\right| \cdot \left|\sqrt{\frac{r_1}{r}}\right| = 1\right)$$

hervorgeht, und für welchen die Transformationen (8) selbst gültig sind:

$$\begin{aligned} w_1' &= r_2 \cdot e^{i(\varphi - \psi)} \cdot z_1' + r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2', \\ w_2' &= r_3 \cdot e^{i\psi} \cdot z_1' - r_2 \cdot e^{i(\varphi + \psi)} \cdot z_2', \end{aligned}$$

gehört die Ebene, die durch die Abbildung Punkt für Punkt in die konjugierte übergeführt wird, zu einer Ebenenschar, die aus der oben erwähnten dreiparametrigen Ebenenmenge durch die Substitution (11) erzeugt wird.

Wir betrachten nun noch den Fall, daß in (8) $r_1 = 0$ oder $r_3 = 0$ und daher $r_2 = 1$ ist. Nun müssen r_1 und r_3 gleichzeitig verschwinden, denn ist etwa $r_1 = 0$ und $r_3 \neq 0$, so gelangt vermöge (8) jede Ebene $z_1 =$ konst. in eine Ebene $w_1 =$ konst., wobei sie in sich eine Drehung um einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt oder eine Parallelverschiebung erleidet. Dies ist bei Abbildung eines Kreisbereiches auf sich aber unmöglich. Die allgemeinste in diesem Fall in Betracht kommende Transformation ist daher die folgende ($\varphi - \psi = \varphi_1$, $\varphi + \psi + \pi = \varphi_2$):

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i\varphi_1} \cdot z_1, \\ w_2 &= e^{i\varphi_2} \cdot z_2, \end{aligned}$$

bei welcher diejenigen Punkte, die in ihre konjugierten übergehen, die zu den Parametern $\left(-\frac{\varphi_1}{2}, -\frac{\varphi_2}{2}\right)$ gehörige absolute Ebene erfüllen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung fassen wir zusammen in dem

Satz 3. *Diejenigen linearen Abbildungen, welche einen Kreisbereich mit festem Mittelpunkt so in sich überführen, daß unendlich viele Punkte, von denen keine zwei in einer durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene liegen, einzeln in die konjugierten Punkte übergehen, sind die folgenden:*

I. *Bei einem beliebigen Kreisbereich:*

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$
$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2.$$

Die Punkte erfüllen die absolute Ebene $\left(-\frac{\varphi_1}{2}, -\frac{\varphi_2}{2}\right)$.

II. *Bei einem zu einer symmetrischen Klasse gehörigen Kreisbereich außerdem:*

$$w_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2,$$
$$w_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1.$$

Die Punkte erfüllen eine nichtanalytische Ebene, die beim Normalbereich der Klasse mit der Diagonalebene $(-\varphi)$ *identisch ist.*

III. *Bei einem Kreisbereich der Kugelklasse außerdem:*

$$w_1 = r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \cdot z_1 + r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2,$$
$$w_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1 - r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \cdot z_2.$$

Die Punkte erfüllen im Falle der Kugel selbst eine nichtanalytische Ebene, die aus einer absoluten Ebene durch eine reelle Drehung hervorgeht.

§ 3.

Das Spiegelungsprinzip zweiter Art.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Übertragung eines über das gewöhnliche Spiegelungsprinzip hinausgehenden bekannten Theorems der konformen Abbildungen, das in der Ebene folgendermaßen lautet: Es sei ein zu einer Geraden symmetrischer Bereich und ein Kreis gegeben. Wird der Bereich umkehrbar eindeutig so auf den Kreis abgebildet, daß der Mittelpunkt des Kreises aus einem Punkt der Symmetrieachse hervorgeht, so wird die Symmetrieachse selbst auf einen Kreisdurchmesser abgebildet, und daher gehen (nach dem Spiegelungsprinzip erster Art) zur Symmetrieachse spiegelbildliche Punkte in zu jenem Durchmesser spiegelbildliche Punkte über.

Um diesen Satz zu übertragen, betrachten wir einen konvexen Kreisbereich und einen weiteren vierdimensionalen Bereich, der zur reellen Ebene spiegelbildlich sein und den Nullpunkt im Inneren enthalten möge. Wir bilden beide Bereiche umkehrbar eindeutig so aufeinander ab, daß

der Nullpunkt festbleibt. Da man jeden Kreisbereich auf den Normalbereich derselben Klasse abbilden kann, setzen wir den Kreisbereich gleich noch als Normalbereich, d. h. bei einer symmetrischen Klasse als symmetrischen Bereich und bei der Kugelklasse als Kugel voraus.

Seien nun:

$$(12_1) \qquad \begin{aligned} w_1 &= f_1(z_1, z_2), \\ w_2 &= f_2(z_1, z_2) \end{aligned}$$

die Funktionen, welche die gewünschte Abbildung leisten. Dann müssen, da beide Bereiche zur reellen Ebene symmetrisch sind (s. Satz 17 des I. Teils, S. 228), auch die Funktionen:

$$(12_2) \qquad \begin{aligned} w_1 &= \bar{f}_1(z_1, z_2), \\ w_2 &= \bar{f}_2(z_1, z_2) \end{aligned}$$

eine Abbildung mit den gleichen Eigenschaften vermitteln; denn diese Abbildung läßt sich zerlegen in die folgenden:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \bar{z}_1, & \omega_1 &= f_1(\zeta_1, \zeta_2), & w_1 &= \bar{\omega}_1, \\ \zeta_2 &= \bar{z}_2, & \omega_2 &= f_2(\zeta_1, \zeta_2), & w_2 &= \bar{\omega}_2. \end{aligned}$$

Die Abbildungen (12_1) und (12_2) zusammen involvieren aber eine umkehrbar eindeutige Abbildung des konvexen Kreisbereiches in sich von folgendem Charakter: Der Nullpunkt bleibt fest; die nichtanalytische Fläche, in welche die reelle Ebene durch (12_1) übergeht, wird an der reellen Ebene punktweise gespiegelt. Nun kann diese Fläche mit keiner analytischen Fläche ein Flächenstück gemeinsam haben, denn jeder solchen analytischen Fläche entspricht im ursprünglichen Bereich wieder eine analytische Fläche, welche ihrerseits kein Stück mit der reellen Ebene gemeinsam haben kann, da überhaupt kein Stück einer analytischen Fläche eben sein kann, ohne daß die Fläche eine analytische Ebene ist. Nach dem eben Gesagten muß aber unsere nichtanalytische Fläche unendlich viele Punkte enthalten, von denen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen.

Nun können wir die Sätze 1 und 3 des vorigen Paragraphen, S. 243 und S. 249, nacheinander anwenden. Dann kann aber die als Bild der reellen Ebene auftretende Fläche nur mit gewissen nichtanalytischen Ebenen identisch sein. Da diese Ebenen ferner offenbar sämtlich durch analytische Drehungen in die reelle Ebene überführt werden können (in bezug auf die Diagonalebenen siehe Satz 14 des I. Teils, S. 226), so können wir noch nach Satz 5 des II. Teils, S. 237, folgern, daß zur reellen Ebene spiegelbildliche Punkte des symmetrischen Bereichs in zu der betreffenden nichtanalytischen Ebene spiegelbildliche Punkte des Normalbereichs übergehen müssen. (Vgl. dazu auch noch Satz 22 des I. Teils, S. 230.) Wir erhalten somit den

Satz 4. *Wird ein zur reellen Ebene symmetrischer und den Nullpunkt im Inneren enthaltender Bereich derart umkehrbar eindeutig auf einen konvexen Normalbereich abgebildet, daß der Nullpunkt festbleibt, so kann die reelle Ebene nur übergehen:*

I. *bei einem beliebigen Kreisbereich in eine absolute Ebene,*

II. *bei einem symmetrischen Kreisbereich außerdem in eine Diagonalebene,*

III. *bei der Kugel außerdem in eine nichtanalytische Ebene, die aus einer absoluten Ebene durch eine reelle Drehung hervorgeht.*

Wir fügen sofort noch eine selbstverständliche Erweiterung an in folgendem

Satz 5. *Ist der in Satz 4 vorkommende Bereich zwar nicht symmetrisch zur reellen Ebene, aber zu einer nichtanalytischen Ebene, die aus der reellen Ebene durch eine analytische Drehung hervorgeht, und bleibt der Nullpunkt nach wie vor fest, so muß auch jene Ebene bei der Abbildung in eine der in Satz 4 aufgestellten Ebenen übergehen.*

§ 4.

Über die Abbildungen zweier Kreisbereiche aufeinander.

Wir betrachten nunmehr diejenigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen zweier konvexer Kreisbereiche aufeinander, welche den Mittelpunkt festlassen. Wir wollen beweisen, daß solche Abbildungen nicht existieren, falls die Bereiche verschiedenen Klassen angehören. Da die Bereiche einer und derselben Klasse durch lineare Transformationen aufeinander abgebildet werden können, so genügt es, beim Beweise lediglich Normalbereiche ins Auge zu fassen.

Wir nehmen also an, daß zwei verschiedene konvexe Normalbereiche durch die Funktionen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_{10} z_1 + a_{01} z_2 + \ldots, \\ w_2 &= b_{10} z_1 + b_{01} z_2 + \ldots \end{aligned}$$

umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden. Nun ist jeder Normalbereich nach Satz 17 des I. Teils, S. 228, spiegelbildlich zu jeder absoluten Ebene. Wir können daher jetzt die Sätze 4 und 5 (siehe oben) anwenden, indem wir den einen Normalbereich mit dem dort vorkommenden symmetrischen Bereich identifizieren. Dann folgt aus jenen Sätzen, daß die sämtlichen absoluten Ebenen des einen Normalbereichs in solche Ebenen des anderen Normalbereichs übergehen müssen, die zu den in Satz 4 aufgestellten Ebenenscharen gehören.

Nun ist zunächst zu bemerken, daß selbst dann, wenn der zweite Normalbereich symmetrisch ist, keine Diagonalebene in Frage kommt.

Denn ginge eine absolute Ebene $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ in eine solche Diagonalebene über, so müßten diejenigen unendlich vielen absoluten Ebenen $(\varphi_1^0, 0 \leqq \varphi_2 < \pi$, oder $0 \leqq \varphi_1 < \pi, \varphi_2^0)$, welche die erste in derselben Geraden schneiden, in solche absoluten oder Diagonalebenen transformiert werden, die mit jener Diagonalebene sämtlich dieselbe Gerade gemeinsam haben. Dies ist aber unmöglich, da nach den Bemerkungen von § 4 des I. Teils, S. 226, sich zwei Diagonalebenen überhaupt nicht treffen und eine absolute Ebene eine Diagonalebene nur in einer solchen Geraden schneidet, durch die keine weitere absolute Ebene geht.

Die Kugel, bei welcher die Verhältnisse allerdings komplizierter liegen können, da hier noch andere mögliche Ebenen auftreten, kann außer Betracht bleiben, da wir sie, falls einer der beiden Normalbereiche mit ihr identisch ist, als ersten Bereich ansehen können, der auf den anderen, welcher dann keine Kugel ist, abgebildet wird.

Wir erhalten so das Ergebnis, daß bei unserer Abbildung jedenfalls alle absoluten Ebenen des einen Normalbereichs in absolute Ebenen des andern Normalbereichs übergehen müssen. Dann muß es aber auch eine Abbildung geben, bei welcher die reelle Ebene fest bleibt. Es sei dies die Abbildung (13), so daß dort alle Koeffizienten reell sind. Da nun jede andere absolute Ebene (φ_1, φ_2) wieder in eine absolute Ebene (ψ_1, ψ_2) übergehen muß, so müssen auch alle Funktionen, die aus (13) durch die Substitutionen:

$$z_1 = e^{i\varphi_1} \cdot \zeta_1, \qquad w_1 = e^{i\psi_1} \cdot \omega_1,$$
$$z_2 = e^{i\varphi_2} \cdot \zeta_2, \qquad w_2 = e^{i\psi_2} \cdot \omega_2$$

hervorgehen, also die Funktionen:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \omega_1 &= a_{10} \cdot e^{i(\varphi_1 - \psi_1)} \cdot \zeta_1 + a_{01} \cdot e^{i(\varphi_2 - \psi_1)} \cdot \zeta_2 + \ldots, \\ \omega_2 &= b_{10} \cdot e^{i(\varphi_1 - \psi_2)} \cdot \zeta_1 + b_{01} \cdot e^{i(\varphi_2 - \psi_2)} \cdot \zeta_2 + \ldots, \end{aligned}$$

reelle Koeffizienten besitzen. Dies ist aber im allgemeinen unmöglich.

Denn ist zunächst $a_{10} \neq 0$ und $b_{01} \neq 0$, so muß für alle absoluten Ebenen (φ_1, φ_2):

$$\psi_1 = \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \psi_1 = \varphi_1 + \pi,$$
$$\psi_2 = \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \psi_2 = \varphi_2 + \pi$$

sein. Dann müssen aber sämtliche anderen Koeffizienten der Potenzreihen (14) verschwinden. Denn wäre etwe $a_{kl} \neq 0$ (k, l nicht gleichzeitig bzw. $= 1,0$), so müßte $a_{kl} \cdot e^{i(k \cdot \varphi_1 + l \cdot \varphi_2 - \psi_1)}$ reell, d. h.:

$$k \cdot \varphi_1 + l \cdot \varphi_2 - \psi_1 = (k-1) \cdot \varphi_1 + l \cdot \varphi_2 = 0 \text{ oder } = \pi$$

sein, was unmöglich ist, da φ_1 und φ_2 unabhängig beliebig veränderlich sind; und Ähnliches gilt, falls $b_{lk} = 0$ ist. Dann reduzieren sich die Funktionen (13) aber auf die folgenden:

$$(15)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_{10}\cdot z_1,\\ w_2 &= b_{01}\cdot z_2, \end{aligned}\qquad (a_{10},\ b_{01}\ \text{reell})$$

und diese können keine zwei verschiedenen Normalbereiche aufeinander abbilden.

Ist aber entweder $a_{10} = 0$ oder $b_{01} = 0$, so muß gleichzeitig $a_{01} \neq 0$ und $b_{10} \neq 0$ sein, da sonst die Funktionaldeterminante im Nullpunkt verschwinden würde. Dann muß aber für alle absoluten Ebenen (φ_1, φ_2):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \psi_1 = \varphi_2 + \pi,\\ \psi_2 &= \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \psi_2 = \varphi_1 + \pi \end{aligned}$$

sein und es folgt genau wie vorhin, daß sämtliche anderen Koeffizienten in (13) verschwinden und diese Funktionen sich daher auf die folgenden reduzieren müssen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} w_1 &= a_{01}\cdot z_2,\\ w_2 &= b_{10}\cdot z_1; \end{aligned}\qquad (a_{01},\ b_{10}\ \text{reell})$$

auch diese bilden einen Normalbereich höchstens auf einen anderen Bereich der betreffenden Klasse ab.

Damit erhalten wir als Ziel unserer Untersuchungen das

Theorem 1. *Zwei konvexe Kreisbereiche, die verschiedenen Klassen angehören, können niemals umkehrbar eindeutig so aufeinander abgebildet werden, daß der Mittelpunkt fest bleibt.*

Im Anschluß hieran ergibt sich unter Berücksichtigung der Sätze 24 und 25 des I. Teils, S. 231, sofort noch das

Theorem 2. *Ein Bereich der Kugelklasse oder ein Bereich der Zylinderklasse kann auf einen einer anderen Klasse angehörigen konvexen Kreisbereich überhaupt nicht umkehrbar eindeutig abgebildet werden.*

§ 5.

Über die Abbildungen eines Kreisbereiches in sich.

Wir sind nunmehr auch noch in der Lage, die Betrachtungen des Paragraphen 2, S. 240 ff., in abschließender Weise zu ergänzen, ohne daß wir die dort erforderliche Diskussion der linearen Funktionen (s. Satz 1, S. 243) durchzuführen brauchen. Denn die Untersuchungen des vorigen Paragraphen behalten offenbar auch dann ihre Gültigkeit, wenn die beiden Normalbereiche identisch sind, so daß es sich also um die Abbildungen eines Normalbereiches in sich mit festem Mittelpunkt handelt, allerdings ausgenommen den Fall, daß der Bereich eine Kugel ist.

Für jene Abbildungen kommen also ebenfalls nur die Funktionen (15) und (16) in Betracht. Sollen diese aber einen Kreisbereich in sich ab-

bilden, so muß $|a_{10}| = |b_{01}| = 1$ bzw. $|a_{01}| = |b_{10}| = 1$ sein. Außerdem muß ein Kreisbereich, welcher durch die Funktionen (16) in sich übergehen soll, offenbar symmetrisch sein. Die in den Sätzen 16 und 21 des I. Teils, S. 227 und S. 230, angegebenen Abbildungen sind also die einzigen, die einen konvexen Kreisbereich mit festem Mittelpunkt in sich überführen, sofern er nicht der Kugelklasse angehört.

Aber der Fall, daß der Normalbereich eine Kugel ist, läßt sich mit Hilfe von Satz 1, S. 243, ohne weiteres direkt erledigen. Denn da bei einer Abbildung der Kugel in sich mit festem Mittelpunkt jeder Punkt seine Entfernung vom Nullpunkt beibehalten muß, so kann die durch die linearen Funktionen vermittelte Abbildung nur eine Drehung sein. Die in Satz 23 des I. Teils, S. 231, für die Kugel angegebenen Abbildungen sind also ebenfalls die einzigen, die hier in Frage kommen. Entsprechende Abbildungen existieren dann für die anderen der Kugelklasse angehörigen Doppelellipsoide.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen in dem

Theorem 3. *Die einzigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen, die einen konvexen Kreisbereich so in sich überführen, daß der Mittelpunkt fest bleibt, sind die folgenden:*

I. *Bei einem beliebigen Kreisbereich die Drehungen:*

$$w_1 = e^{i\varphi_1}\cdot z_1,\quad w_2 = e^{i\varphi_2}\cdot z_2. \tag{17}$$

II. *Bei einem einer symmetrischen Klasse angehörigen Kreisbereich außerdem die Drehstreckungen:*

$$w_1 = R\cdot e^{i\varphi_1}\cdot z_2,\quad w_2 = \frac{1}{R}\cdot e^{i\varphi_2}\cdot z_1 \qquad (R \text{ positiv reell}). \tag{18}$$

III. *Bei einem zu der Kugelklasse gehörigen Kreisbereich die Drehstreckungen:*

$$w_1 = a_1\cdot z_1 + a_2\cdot R\cdot z_2,\quad w_2 = b_1\cdot\frac{1}{R}\cdot z_1 + b_2\cdot z_2 \qquad (R \text{ positiv reell}). \tag{19}$$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1,$$
$$|b_1|^2 + |b_2|^2 = 1,$$
$$a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich unter Zuhilfenahme der Sätze 24 und 25 des I. Teils, S. 231, gleichzeitig noch das

Theorem 4. *Die einzigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines konvexen Kreisbereiches in sich sind, falls er der Zylinderklasse angehört, diejenigen, welche sich aus der Transformation:*

$$w_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{a_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + b_1}{\bar{b}_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + \bar{a}_1}, \qquad (|a_1|^2 - |b_1|^2 > 0)$$

$$(R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

$$w_2 = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{a_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + b_2}{\bar{b}_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + \bar{a}_2} \qquad (|a_2|^2 - |b_2|^2 > 0)$$

im Verein mit den Abbildungen (17) *und* (18) *ergeben, und werden, wenn er zur Kugelklasse gehört, durch die Transformation:*

$$w_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{a_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + a}{c_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + c},$$

$$w_2 = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{b_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + b}{c_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + c} \qquad (R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

(*mit den Nebenbedingungen des Satzes* 24, *S.* 231) *zusammen mit den Drehstreckungen* (19) *geliefert.*

In den letzten Sätzen bedeuten R_1 und R_2 die reziproken Werte der Radien der Schnittkreise des Kreisbereiches mit den Koordinatenebenen. und es ist $R = \frac{R_2}{R_1}$.

(Eingegangen am 25. 10. 1920.)

Über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Singularitäten und die dazugehörigen Darstellungen willkürlicher Funktionen.

Von

Willi Windau in Bockhorst.

Einleitung.

Die lineare, sich selbst adjungierte Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d}{ds}\left(p\frac{du}{ds}\right)+(q+\lambda^2)u=0,$$

in der p eine für $s \geqq 0$ definierte reelle, stetig differenzierbare, wesentlich positive, q eine reelle, stetige Funktion der reellen Variablen s und λ einen komplexen Parameter $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ $(\lambda_2>0)$ bezeichnet, besitzt eine zum Intervall $(0, a)$ gehörige Greensche Funktion $G^a(\lambda^2, s, t)$, die den Randbedingungen

$$(2)\qquad \left[\cos h\, G^a+\sin h\, p\frac{\partial G^a}{\partial s}\right]_{s=0}=0,$$

$$(3)\qquad \left[\cos j\, G^a+\sin j\, p\frac{\partial G^a}{\partial s}\right]_{s=a}=0$$

genügt. Sind nämlich ϑ und η zwei partikuläre Integrale von (1), für die

$$(4)\qquad \vartheta(0)=\cos h,\quad \left[p\frac{d\vartheta}{ds}\right]_{s=0}=-\sin h,$$

$$\eta(0)=\sin h,\quad \left[p\frac{d\eta}{ds}\right]_{s=0}=\cos h$$

ist, so hat nach Weyl[1]) G^a die Gestalt

$$(5)\qquad \begin{aligned} G^a(\lambda^2, s, t) &= \eta(s)\cdot\beta_{l_a}(t) && \text{für } s\leqq t,\\ &= \eta(t)\cdot\beta_{l_a}(s) && \text{für } s\geqq t, \end{aligned}$$

worin

$$(6)\qquad \beta_{l_a}(s)=\vartheta(s)+l_a\,\eta(s)$$

[1]) Math. Ann. 68, S. 220 ff.

gesetzt und l_a eine Konstante ist. Herr Weyl deutet l_a als Punkt einer komplexen Zahlenebene: $l = l_1 + i l_2$; durchläuft dann j in (3) die Werte von 0 bis π, so durchläuft l einen Kreis $\mathfrak{K}_a$ vom Radius

$$r_a = \frac{1}{4\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^a |\eta(t)|^2\,dt}. \tag{7}$$

Ist $a > b$, so liegt $\mathfrak{K}_a$ ganz im Inneren von $\mathfrak{K}_b$, so daß $\mathfrak{K}_a$, wenn a über alle Grenzen wächst, entweder gegen einen Grenzkreis $\mathfrak{K}$ konvergiert oder auf einen Grenzpunkt $\mathfrak{L}$ zusammenschrumpft. Im ersten Falle hat man eine gewöhnliche Integralgleichung, während der Grenzpunktfall auf eine singuläre Integralgleichung führt.

Hilb[9]) hat dann im Anschluß an diese Untersuchungen von Weyl im Grenzpunktfalle die Darstellung zweimal stetig differenzierbarer Funktionen $f(s)$, für die

$$\int\limits_0^\infty f(s)^2\,ds \tag{8}$$

existiert, aus dem Cauchyschen Residuensatze abgeleitet, wobei dann die Bedeutung der von λ^2 abhängigen Größen $\mathfrak{L}$ für die Integraldarstellung hervortritt. Hilb legt dazu die Differentialgleichung in der für die Abschätzungen bequemeren Form

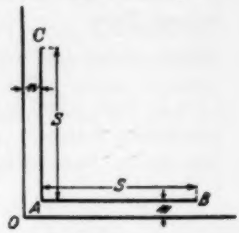

Fig. 1.

$$\frac{d^2u}{ds^2} + (q + \lambda^2)u = 0, \tag{9}$$

die partikulären Integrale ϑ und η durch

$$\vartheta(0) = 1, \quad \vartheta'(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 1 \tag{10}$$

normiert zugrunde und gelangt schließlich zu dem Ergebnis

$$f(s) = \lim_{S=\infty} \mathfrak{R}\, \frac{1}{\pi i}\int\limits_{W_S} 2\lambda\, d\lambda\, \eta(s) \int\limits_0^\infty \beta(t) f(t)\,dt. \tag{11}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{R}$ den reellen Teil und W_S den Weg über die Strecken CAB, die in der Länge S und im Abstande $\varepsilon = e^{-S^{5/4}}$ parallel zur reellen und imaginären Achse verlaufen (Fig. 1).

Um den Grenzübergang durchzuführen, hat man, wenn a eine positive Größe ist, von der entsprechenden Darstellung für $\int\limits_0^a f^2(s)\,ds$ auszugehen. Bezeichnet man mit $G_2(\lambda^2, s, t)$ den imaginären Teil der zum Intervall $(0, \infty)$ gehörigen Greenschen Funktion, so ist für jede quadratisch integrierbare Funktion $x(s)$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty G_2(\lambda^2, s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt > 0.$$

[9]) Math. Ann. 76, S. 333f.

Man kann daher, wenn $f(s)$ quadratisch integrierbar ist, den Grenzübergang in die reelle Achse der λ^2 machen und dann a nach ∞ wachsen lassen. Man erhält so eine Darstellung von $\int\limits_0^\infty f^2(s)\,ds$, bei der die von den Eigenwerten herrührenden Glieder von den anderen getrennt sind, und daraus in bekannter Weise durch Polarisierung die Darstellung für $\int\limits_0^\infty G_2(\lambda^2, s, t) f(t)\,ds$. Für die Zwecke einer reinen Integraldarstellung ist aber (11) in vielen Fällen geeigneter[8]).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, wie sich die Untersuchungen von Weyl und Hilb auf Differentialgleichungen vierter Ordnung, die ihrer adjungierten gleich sind, sinngemäß übertragen lassen.

Indem ich im ersten Teile die Differentialgleichung in der allgemeinen Form

$$(12)\qquad L(u)+\lambda^4 u = \frac{d^2}{ds^2}\left(p\,\frac{d^2u}{ds^2}\right)+\frac{d}{ds}\left(q\,\frac{du}{ds}\right)+(r+\lambda^4)\,u=0$$

($\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, $0<\lambda_2<\lambda_1$) zugrunde lege und vier linear unabhängige partikuläre Integrale $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ so bestimme, daß sie an der Stelle $s=0$ den reellen Randbedingungen

(13)

	η	η'	$p\eta''$	$q\eta'+p'\eta''+p\eta'''$
1	x_1	$-x_2$	x_3	x_4
2	x_2	x_1	x_4	$-x_3$
3	$-x_3$	$-x_4$	x_1	$-x_2$
4	$-x_4$	x_3	x_2	x_1

genügen, wo

$$(14)\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$$

ist, finde ich für die zum Intervall $(0, a)$ gehörige Greensche Funktion $G^a(\lambda^4, s, t)$, die an der Stelle $s=0$ die reellen Randbedingungen

$$(15)\qquad \begin{cases} [x_1G^a - x_2G^{a\prime} + x_3pG^{a\prime\prime} + x_4(qG^{a\prime}+p'G^{a\prime\prime}+pG^{a\prime\prime\prime})]_{s=0}=0, \\ [-x_3G^a - x_4G^{a\prime} + x_1pG^{a\prime\prime} + x_2(qG^{a\prime}+p'G^{a\prime\prime}+pG^{a\prime\prime\prime})]_{s=0}=0, \end{cases}$$

bei $s=a$ die ebenfalls reellen Bedingungen

$$(16)\qquad \begin{cases} [y_1G^a - y_2G^{a\prime} + y_3pG^{a\prime\prime} + y_4(qG^{a\prime}+p'G^{a\prime\prime}+pG^{a\prime\prime\prime})]_{s=a}=0, \\ [-y_3G^a - y_4G^{a\prime} + y_1pG^{a\prime\prime} + y_2(qG^{a\prime}+p'G^{a\prime\prime}+pG^{a\prime\prime\prime})]_{s=a}=0 \end{cases}$$

erfüllt, worin

$$(17)\qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=1$$

[8]) Es wird Aufgabe einer späteren Mitteilung sein, auf diese Verhältnisse näher einzugehen und zu zeigen, daß man zur Ableitung von (11) für $f(s)$ nur beschränkte Schwankung statt zweimaliger Differenzierbarkeit zu fordern braucht.

ist, den Ausdruck

$$G^a(\lambda^4, s, t) = \eta_2(s)\beta_{3l_a}(t) + \eta_4(s)\beta_{1n_a}(t) \text{ für } s \leqq t, \tag{18}$$

$$= \beta_{3l_a}(s)\eta_2(t) + \beta_{1n_a}(s)\eta_4(t) \text{ für } s \geqq t,$$

wo

$$\beta_{3l_a} = \eta_3 + l_a\eta_2 + m_a\eta_4, \quad \beta_{1n_a} = \eta_1 + m_a\eta_2 + n_a\eta_4 \tag{19}$$

ist. Da nun η_2 und η_4 an der Stelle $s = 0$ denselben Randbedingungen genügen, müssen β_1 und β_3 dies aus Symmetriegründen bei $s = a$ tun. Da ferner die Bedingungen (15) reell sind, folgt, daß auch $\bar{\beta}_3$ und $\bar{\beta}_1$, die konjugierten Funktionen zu β_3 und β_1, ihnen genügen müssen, was zu den Gleichungen

$$\int_0^a |\beta_{3l_a}|^2 ds = l_2, \quad \int_0^a |\beta_{1n_a}|^2 ds = n_2 \tag{20}$$

führt. Indem ich l, m als Punkt eines Raumes von vier Dimensionen deute, finde ich, daß die erste Gleichung von (20) eine ganz im Endlichen gelegene Fläche $\mathfrak{F}_a$ vom zweiten Grade in l, m darstellt, deren Schnitte mit $l = \text{const}$ und $m = \text{const}$ Kreise sind. Der größte Kreis $\mathfrak{K}_{l_a}$ von $\mathfrak{F}_a$ in einer Ebene $m = \text{const}$ hat den Radius

$$r_{l_a} = \frac{1}{2(\lambda^4)_2 \int_0^a |\eta_2|^2 dt}, \tag{21}$$

und es zeigt sich, daß, wenn $b > a$ ist, $\mathfrak{F}_b$ ganz im Inneren von $\mathfrak{F}_a$ liegt. Entsprechend ergibt die Untersuchung der zweiten Gleichung (20), daß auch diese eine ganz im Endlichen gelegene Fläche $\mathfrak{G}_a$ vom zweiten Grade in den Koordinaten m, n darstellt, deren Schnitte mit $m = \text{const}$ und $n = \text{const}$ Kreise sind, und deren größter Kreis in einer Ebene $m = \text{const}$ den Radius

$$r_{n_a} = \frac{1}{2(\lambda^4)_2 \int_0^a |\eta_4|^2 dt} \tag{22}$$

hat, und daß für $b > a$ $\mathfrak{G}_b$ ganz im Inneren von $\mathfrak{G}_a$ liegt. Bei unendlich wachsendem a konvergieren $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{G}_a$ gegen zwei Grenzgebilde, die, wie sich zeigt, entweder zwei Grenzflächen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ oder zwei Grenzpunkte $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sind. Aus der Konvergenz schließen wir aber: *die Differentialgleichung* (12) *— mag sie vom Grenzflächen- oder vom Grenzkreistypus sein — besitzt mindestens zwei im Intervall* $(0, \infty)$ *absolut quadratisch integrierbare Integrale* β_3 *und* β_1. *Im Grenzflächenfalle folgt aus* (21) *und* (22), *daß auch* η_2 *und* η_4 *und mithin alle Integrale von* (12) *im gleichen Intervall absolut quadratisch integrierbar sind.*

Im zweiten Teile, der der Darstellung willkürlicher Funktionen gewidmet ist, beschäftige ich mich ausschließlich mit dem Grenzpunktfalle.

Für die nachfolgenden Abschätzungen ist es bequem, $p = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ anzunehmen. Dadurch geht (12) über in

$$\frac{d^4 u}{ds^4} + \frac{d}{ds}\left(q\frac{du}{ds}\right) + (r + \lambda^4)u = 0, \tag{23}$$

während (13) und (15) übergehen in

(24)

	η	η'	η''	$q\eta' + \eta'''$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

$$G^a(\lambda^4, 0, t) = G^{a''}(\lambda^4, 0, t) = 0. \tag{25}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (21) und (22) lassen sich dann die für G^a gültigen Sätze auf die zum Intervall $(0, \infty)$ gehörige Greensche Funktion $G(\lambda^4, s, t)$ übertragen, und insbesondere zeigt sich, daß die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^4 u = -g(s), \tag{26}$$

wenn $g(s)$ eine stetige, im Intervall $(0, \infty)$ absolut quadratisch integrierbare Funktion von s ist, ein ebenfalls von 0 bis ∞ absolut quadratisch integrierbares Integral

$$f(s) = \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t)g(t)dt \tag{27}$$

besitzt. Indem ich für die asymptotische Darstellung der $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ für große $|\lambda|$ ein Resultat des Herrn Birkhoff benutze, erhalte ich mit Hilfe von (21) und (22) eine bequeme asymptotische Darstellung von $\int_0^\infty G(\lambda^4, s, t)g(t)dt$, die dann ihrerseits unter Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes zu einer Darstellung viermal stetig differenzierbarer Funktionen $f(s)$ führt, die der von Hilb für den Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gegebenen Darstellung (11) entspricht:

$$f(s) = \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i}\int_{W_S} 4\lambda^3 d\lambda \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t)f(t)dt, \tag{28}$$

worin W_S den Weg längs der Strecken CAB bezeichnet, die in der Länge S und im Abstande $\varepsilon = e^{-S^{1/4}}$ parallel zu den Geraden $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_2$ verlaufen. Zum Schluß wird gezeigt, wie sich die allgemeinen Resultate gestalten, wenn man den einfachsten Fall der Differentialgleichung

$$\frac{d^4 u}{ds^4} + \lambda^4 u = 0 \tag{29}$$

zugrunde legt.

Erster Teil.

Die Greensche Funktion.

1.

Es bezeichne $L(u)$ den allgemeinen sich selbst adjungierten linearen Differentialausdruck vierter Ordnung

$$L(u) = \frac{d^2}{ds^2}\left(p\frac{d^2u}{ds^2}\right) + \frac{d}{ds}\left(q\frac{du}{ds}\right) + ru, \tag{30}$$

und es werde zur Abkürzung geschrieben:

$$[u, v] = u(qv' + p'v'' + pv''') - u'pv'' - v(qu' + p'u'' + pu''') + v'pu''. \tag{31}$$

Ferner bedeute $[u, v]_a$ den Wert des Ausdruckes (31) bei $s = a$. Dann gelten die folgenden Regeln:

$$[u, v] = -[v, u], \tag{32}$$

$$[u, av + bw] = a[u, v] + b[u, w], \tag{33}$$

$$[u, v] = [u_1, v_1] - [u_2, v_2] + i\{[u_1, v_2] + [u_2, v_1]\}, \tag{34}$$
$$(u = u_1 + iu_2, \quad v = v_1 + iv_2),$$

$$[u, \bar{u}] = 2i[u_2, u_1], \quad (\bar{u} = u_1 - iu_2). \tag{35}$$

Sind u und v stetige Funktionen von s, für die L existiert und stetig ist, so gilt die Greensche Formel

$$\int_a^b (uL(v) - vL(u))ds = [u, v]_b - [u, v]_a. \tag{36}$$

Sei nun p eine für $s \geqq 0$ zweimal differentiierbare positive, q eine im selben Bereiche einmal stetig differentiierbare, r eine stetig reelle Funktion von s, so betrachten wir die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^4(u) = \frac{d^2}{ds^2}\left(p\frac{d^2u}{ds^2}\right) + \frac{d}{ds}\left(q\frac{du}{ds}\right) + (r + \lambda^4)u = 0. \tag{37}$$

Aus (36) folgt zunächst, wenn $v = v_1 + iv_2$ eine Lösung von (37) und $\bar{v} = v_1 - iv_2$ eine Lösung der zu (37) konjugierten Differentialgleichung

$$L(u) + \bar{\lambda}^4 u = 0 \tag{38}$$

ist:

$$\int_a^b (vL(\bar{v}) - \bar{v}L(v))ds = (\lambda^4 - \bar{\lambda}^4)\int_a^b v\bar{v}\,ds \tag{39}$$
$$= 2i\{[v_2, v_1]_b - [v_2, v_1]_a\},$$

oder

$$\int_a^b v\bar{v}\,ds = \int_a^b |v|^2 ds = \frac{1}{(\lambda^4)_2}\{[v_2, v_1]_b - [v_2, v_1]_a\}. \tag{40}$$

(37) besitzt vier partikuläre Integrale v_1, v_2, v_3, v_4, die bei $s = 0$ in folgender Weise normiert sind:

(41)

	v	v'	pv''	$qv' + p'v'' + pv'''$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

und aus diesen lassen sich alle übrigen linear zusammensetzen:

$$\eta = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4. \tag{42}$$

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten der Einheitskugel im Raume von vier Dimensionen:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \tag{43}$$

so bilden wir die Integrale

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 v_1 - x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 \\ \eta_2 &= x_2 v_1 + x_1 v_2 + x_4 v_3 - x_3 v_4 \\ \eta_3 &= -x_3 v_1 - x_4 v_2 + x_1 v_3 - x_2 v_4 \\ \eta_4 &= -x_4 v_1 + x_3 v_2 + x_2 v_3 + x_1 v_4, \end{aligned} \tag{44}$$

für welche, wenn die erste Kolonne den Index von η angibt, bei $s = 0$ die Beziehungen gelten:

(45)

	η	η'	$p\eta''$	$q\eta' + p'\eta'' + p\eta'''$
1	x_1	$-x_2$	x_3	x_4
2	x_2	x_1	x_4	$-x_3$
3	$-x_3$	x_4	x_1	$-x_2$
4	$-x_4$	x_3	x_2	x_1

Nach (31) ist

$$[\eta_1 \eta_2]_0 = [\eta_1 \eta_3]_0 = [\eta_2 \eta_4]_0 = [\eta_3 \eta_4]_0 = 0, \quad [\eta_1 \eta_4]_0 = -[\eta_2, \eta_3]_0 = 1. \tag{46}$$

2.

Aus den η_i bauen wir die zu dem Intervall $(0, a)$ gehörige Greensche Funktion $G^a(\lambda^4, s, t)$ auf und definieren:

a) $G^a(\lambda^4, s, t)$ genügt für $s \neq t$ als Funktion von s der Differentialgleichung (37);

b) $G^a(\lambda^4, s, t)$ geht samt der ersten und zweiten Ableitung stetig durch $s = t$ hindurch, während die dritte Ableitung dort den Sprung $\frac{1}{p}$ aufweist:

$$\lim_{\varepsilon = 0} \left\{ \left[\frac{\partial^3 G^a(\lambda^4, s, t)}{\partial s^3} \right]_{s = t - \varepsilon} - \left[\frac{\partial^3 G^a(\lambda^4, s, t)}{\partial s^3} \right]_{s = t + \varepsilon} \right\} = \frac{1}{p(t)}; \tag{47}$$

c) G^a genügt bei $s=0$ und $s=a$ je zwei reellen Randbedingungen:

$$(48)\qquad \begin{aligned} x_1 G + x_2 G' + x_3 p G'' + x_4 (q G' + p' G'' + p G''') &= 0, \\ -x_3 G - x_4 G' + x_1 p G'' - x_2 (q G' + p' G'' + p G''') &= 0 \end{aligned}$$

für $s=0$ und

$$(49)\qquad \begin{aligned} y_1 G - y_2 G' + y_3 p G'' + y_4 (q G' + p' G'' + p G''') &= 0, \\ -y_3 G - y_4 G' + y_1 p G'' - y_2 (q G' + p' G'' + p G''') &= 0 \end{aligned}$$

für $s=a$, wobei $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$. Setzen wir nun das allgemeine Integral von (37) in der Form an

$$(50)\qquad \begin{aligned} u &= c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + c_4 \eta_4 \quad \text{für } s \leqq t, \\ u &= d_1 \eta_1 + d_2 \eta_2 + d_3 \eta_3 + d_4 \eta_4 \quad \text{für } s \geqq t, \end{aligned}$$

wo die c_i und d_i von t und λ abhängen, so ergibt sich aus den Bedingungen a) bis c) für $G^a(\lambda^4, s, t)$ die Form

$$(51)\qquad \begin{aligned} G^a(\lambda^4, s, t) &= \eta_2(s)\beta_3(t) + \eta_4(s)\beta_1(t) \quad \text{für } s \leqq t, \\ &= \eta_2(t)\beta_3(s) + \eta_4(t)\beta_1(s) \quad \text{für } s \geqq t, \end{aligned}$$

wo

$$(52)\qquad \beta_3 = \eta_3 + l_a \eta_2 + m_a \eta_4, \qquad \beta_1 = \eta_1 + m_a \eta_2 + n_a \eta_4,$$

und l_a, m_a und n_a komplexe Konstanten sind.

Nun müssen die Randbedingungen (49) für alle $t < a$, also sowohl für β_3 wie für β_1 und wegen der Realität von (49) auch für $\overline{\beta}_3 = \beta_{31} - i\beta_{32}$ und $\overline{\beta}_1 = \beta_{11} - i\beta_{12}$ erfüllt sein, d. h. es ist

$$(53)\qquad [\beta_3 \overline{\beta}_3]_a = 0, \qquad [\beta_1 \overline{\beta}_1]_a = 0,$$

oder, da nach (46) $[\beta_3 \overline{\beta}_3]_0 = -l_2$, $[\beta_1 \overline{\beta}_1]_0 = -n_2$ ist,

$$(54)\qquad (\lambda^4)_2 \int_0^a |\beta_3|^2 dt = l_2, \qquad (\lambda^4)_2 \int_0^a |\beta_1|^2 dt = n_2.$$

3.

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit der ersten Gleichung von (53) bzw. (54)

$$(55)\qquad [\beta_3 \overline{\beta}_3]_a = 0 \quad \text{oder} \quad (\lambda^4)_2 \int_0^a |\beta_3|^2 dt = l_2.$$

(55) stellt, wenn wir l, m als Koordinanten in einem Raume von vier Dimensionen deuten, eine Fläche zweiten Grades dar, die ganz im Endlichen liegt. Wir bemerken nun, daß es auf dieser Fläche einen Punkt l^*, m^* gibt so, daß

$$(56)\qquad \beta_{31}^*(a) = 0, \quad \beta_{31}^{*\prime}(a) = 0, \quad \beta_{31}^{*\prime\prime}(a) = 0, \quad \beta_{31}^{*\prime\prime\prime}(a) = 0$$

ist. (56) wird sicher erfüllt sein, wenn

$$(57)\quad [\beta_{31}^{*}\,\eta_{21}]_a = 0, \quad [\beta_{31}^{*}\,\eta_{22}]_a = 0, \quad [\beta_{31}^{*}\,\eta_{41}]_a = 0, \quad [\beta_{31}^{*}\,\eta_{42}]_a = 0,$$

oder

$$
\begin{aligned}
(58)\quad & \beta_{31}^{*}(a)\{q(a)\eta_{21}'(a) + p'(a)\eta_{21}''(a) + p(a)\eta_{21}'''(a)\} - \beta_{31}^{*\prime}(a)p(a)\eta_{21}''(a) \\
& - \{q(a)\beta_{31}^{*\prime}(a) + p'(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) + p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime\prime}(a)\}\eta_{21}(a) + \eta_{21}'(a)p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) = 0, \\
& \beta_{31}^{*}(a)\{q(a)\eta_{22}'(a) + p'(a)\eta_{22}''(a) + p(a)\eta_{22}'''(a)\} - \beta_{31}^{*\prime\prime}(a)p(a)\eta_{22}''(a) \\
& - \{q(a)\beta_{31}^{*\prime}(a) + p'(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) + p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime\prime}(a)\}\eta_{22}(a) + \eta_{22}'(a)p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) = 0, \\
& \beta_{31}^{*}(a)\{q(a)\eta_{41}'(a) + p'(a)\eta_{41}''(a) + p(a)\eta_{41}'''(a)\} - \beta_{31}^{*\prime}(a)p(a)\eta_{41}''(a) \\
& - \{q(a)\beta_{31}^{*\prime}(a) + p'(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) + p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime\prime}(a)\}\eta_{41}(a) + \eta_{41}'(a)p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) = 0, \\
& \beta_{31}^{*}(a)\{q(a)\eta_{42}'(a) + p'(a)\eta_{42}''(a) + p(a)\eta_{42}'''(a)\} - \beta_{31}^{*\prime}(a)p(a)\eta_{42}''(a) \\
& - \{q(a)\beta_{31}^{*\prime}(a) + p'(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) + p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime\prime}(a)\}\eta_{42}(a) + \eta_{42}'(a)p(a)\beta_{31}^{*\prime\prime}(a) = 0
\end{aligned}
$$

ist; denn die Determinante von (58) ist gleich der Wronskischen Determinante multipliziert mit $p^4(a)$:

$$(59)\qquad \begin{vmatrix} \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{41} & \eta_{42} \\ \eta_{21}' & \eta_{22}' & \eta_{41}' & \eta_{42}' \\ \eta_{21}'' & \eta_{22}'' & \eta_{41}'' & \eta_{42}'' \\ \eta_{21}''' & \eta_{22}''' & \eta_{41}''' & \eta_{42}''' \end{vmatrix}.$$

Wäre sie identisch Null, so müßte eine lineare Beziehung bestehen von der Form

$$(60)\qquad c_1\,\eta_{21} + c_2\,\eta_{22} + c_3\,\eta_{41} + c_4\,\eta_{42} = 0,$$

wo die c_i reell und nicht alle Null sind, und es wäre

$$(61)\qquad (c_1 - i\,c_2)\,\eta_2 + (c_3 - i\,c_4)\,\eta_4$$

ein rein imaginäres Integral von (37). Ein solches ist aber in dem von uns betrachteten Bereiche $\lambda_1 \gtrless \lambda_3 \leqq 0$ unmöglich. Die Wronskische Determinante (76) verschwindet mithin nicht identisch, und wir können das System (56) durch (57) ersetzen.

Um die Gleichungen (57) umzuformen, folgern wir aus den Identitäten (46)

$$(62)\qquad [\beta_3\,\eta_2] = 1, \quad [\beta_3\,\eta_4] = 0, \quad [\beta_1\,\eta_2] = 0, \quad [\beta_1\,\eta_4] = 1$$

oder

$$
(63)\qquad
\begin{aligned}
&[\beta_{31}\,\eta_{21}] - [\beta_{32}\,\eta_{22}] = 1, && [\beta_{31}\,\eta_{22}] + [\beta_{32}\,\eta_{21}] = 0, \\
&[\beta_{31}\,\eta_{41}] - [\beta_{32}\,\eta_{42}] = 0, && [\beta_{31}\,\eta_{42}] + [\beta_{32}\,\eta_{41}] = 0, \\
&[\beta_{11}\,\eta_{21}] - [\beta_{12}\,\eta_{22}] = 0, && [\beta_{11}\,\eta_{22}] + [\beta_{12}\,\eta_{21}] = 0, \\
&[\beta_{11}\,\eta_{41}] - [\beta_{12}\,\eta_{42}] = 1, && [\beta_{11}\,\eta_{42}] + [\beta_{12}\,\eta_{41}] = 0,
\end{aligned}
$$

und wir können (57) ersetzen durch

$$(64)\quad [\beta_{31}^{*}\,\eta_{21}]_a = 0,\quad [\beta_{32}^{*}\,\eta_{21}]_a = 0,\quad [\beta_{31}^{*}\,\eta_{41}]_a = 0,\quad [\beta_{32}^{*}\,\eta_{41}]_a = 0,$$

oder

$$(65)\qquad [\beta_3^{*}\,\eta_{21}]_a = 0,\quad [\beta_3^{*}\,\eta_{41}]_a = 0,$$

und indem wir m zunächst willkürlich lassen, finden wir aus der ersten Gleichung von (65):

$$(66)\qquad l^{*}[\eta_2\,\eta_{21}]_a = -[\eta_3\,\eta_{21}]_a - m[\eta_4\,\eta_{21}]_a,$$

$$l^{*} = -i\,\frac{[\eta_3\,\eta_{21}]_a + m[\eta_4\,\eta_{21}]_a}{[\eta_{22}\,\eta_{21}]_a}.$$

Ferner gibt es einen Punkt l_*, m_*, so daß

$$(67)\qquad \beta_{32*}(a) = 0,\quad \beta_{32*}'(a) = 0,\quad \beta_{32*}''(a) = 0,\quad \beta_{32*}'''(a) = 0$$

ist, und es läßt sich auf analoge Weise wie oben zeigen, daß diese Gleichungen dem System

$$(68)\quad [\beta_{32*}\,\eta_{21}]_a = 0,\quad [\beta_{32*}\,\eta_{22}]_a = 0,\quad [\beta_{32*}\,\eta_{41}]_a = 0,\quad [\beta_{32*}\,\eta_{42}]_a = 0$$

äquivalent sind, das sich nach (63) in

$$(69)\qquad [\beta_{3*}\,\eta_{22}]_a = 0,\quad [\beta_{3*}\,\eta_{42}]_a = 0$$

zusammenziehen läßt. l_* stellt sich bei zunächst willkürlichem m dar:

$$(70)\qquad l_*[\eta_2\,\eta_{22}]_a = -[\eta_3\,\eta_{22}]_a - m[\eta_4\,\eta_{22}]_a,$$

$$l_* = \frac{[\eta_3\,\eta_{22}]_a + m[\eta_4\,\eta_{22}]_a}{[\eta_{22}\,\eta_{21}]_a}.$$

Da aber die zweite Gleichung von (69) aus der zweiten von (65) folgt und umgekehrt, so schließen wir, daß $m^{*} = m_* = M$ sein muß. Die Punkte l^{*}, m^{*} und l_*, m_* fallen jedoch nicht zusammen; denn aus (66) und (70) folgt:

$$(71)\quad l^{*} - l_* = \frac{1}{[\eta_{22}\,\eta_{21}]_a}\{i[\eta_3\,\eta_{21}]_a + iM[\eta_4\,\eta_{21}]_a - [\eta_3\,\eta_{22}]_a - M[\eta_4\,\eta_{22}]_a\}$$

$$= \frac{i}{[\eta_{22}\,\eta_{21}]_a}\{[\eta_3\,\eta_{21}]_a + i[\eta_3\,\eta_{22}]_a + M([\eta_3\,\eta_{41}]_a + i[\eta_3\,\eta_{41}]_a)\},$$

oder nach (46):

$$(72)\qquad l^{*} - l_* = \frac{i}{[\eta_{22}\,\eta_{21}]_a}.$$

Um die geometrische Bedeutung dieser letzten Gleichungen einzusehen, stellen wir die Bedingungen für den höchsten und tiefsten Punkt in bezug auf l_3 auf. Sie sind:

$$(73)\qquad \frac{\partial}{\partial l_1}[\beta_3\bar{\beta}_3]_a=\frac{\partial}{\partial m_1}[\beta_3\bar{\beta}_3]_a=\frac{\partial}{\partial m_2}[\beta\bar{\beta}_3]_a=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial l_2}[\beta_3\bar{\beta}_3]_a\neq 0,\qquad [\beta_3\bar{\beta}_3]_a=0,$$

oder

$$(74)\qquad [\eta_2\bar{\beta}_3]_a+[\beta_3\bar{\eta}_2]_a=0,\qquad [\eta_4\bar{\beta}_3]_a+[\beta_3\bar{\eta}_4]_a=0,$$
$$[\eta_4\bar{\beta}_3]_a+[\beta_3\bar{\eta}_4]_a=0,\qquad [\eta_2\bar{\beta}_3]_a-[\beta_3\bar{\eta}_2]_a\neq 0,$$
$$[\beta_3\bar{\beta}_3]_a=0,$$

oder endlich

$$(75)\qquad [\beta_{31}\eta_{22}]_a-[\beta_{32}\eta_{21}]_a=0,\qquad [\beta_{31}\eta_{41}]_a+[\beta_{32}\eta_{42}]_a=0,$$
$$[\beta_{31}\eta_{42}]_a-[\beta_{32}\eta_{41}]_a=0,\qquad [\beta_{31}\eta_{21}]_a+[\beta_{32}\eta_{22}]_a\neq 0,$$
$$[\beta_3\bar{\beta}_3]_a=0.$$

Der Vergleich dieser letzten Bedingungen mit den Gleichungen (65) bzw. (69) zeigt aber unter Zuhilfenahme der Identitäten (63), daß (75) sowohl für l^*, m^* wie für l_*, m_* erfüllt sind. l^*, m^* und l_*, m_* sind somit der höchste und tiefste Punkt unserer Fläche F_a in bezug auf l_2, und da die Schnitte dieser Fläche mit $m=\text{const}$ Kreise sind, schließen wir hieraus: die Fläche (55) besitzt in bezug auf l einen größten Kreis $\mathfrak{K}_{l_a}$, dessen Durchmesser

$$(76)\qquad 2r_{l_a}=l^*-l_*=\frac{1}{[\eta_{22}\eta_{21}]_a}=\frac{1}{(\lambda^4)_2\int\limits_b^a|\eta_2|^2\,dt}$$

ist.

Jetzt betrachten wir zwei zu verschiedenen Werten a und b $(b>a)$ gehörige Flächen $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{F}_b$. Sie können keinen Punkt gemeinsam haben; denn wäre l', m' ein Punkt sowohl von $\mathfrak{F}_b$ wie von $\mathfrak{F}_a$, so wäre

$$(77)\qquad \int\limits_0^b|\beta_3|^2\,dt-\int\limits_0^a|\beta_3|^2\,dt=\int\limits_a^b|\beta_3|^2\,dt=0,$$

was $\beta_3=0$ zur Folge hätte, so daß η_3, η_2 und η_4 linear abhängig wären, was nicht der Fall ist. $\mathfrak{F}_b$ liegt also ganz innerhalb oder ganz außerhalb von $\mathfrak{F}_a$, d. h. für alle Punkte wird entweder $\int\limits_0^a|\beta_3|^2\,dt<l_2$ oder $>l_2$ sein. Nun ist aber l_2 wegen des positiven Charakters von $\int\limits_0^a|\beta_3|^2\,dt$ stets positiv, woraus folgt:

$$(78)\qquad (\lambda^4)_2\Big[\int\limits_0^a|\beta_3|^2\,dt\Big]^{\cdot}_{l_2=0}>l_2,$$

so daß für alle Punkte im Inneren und auf dem Rande von $\mathfrak{F}_a$ die Ungleichung

$$(79) \qquad (\lambda^4)_2 \int_0^a |\beta_3|^2 dt \leqq l_2$$

gilt, $\mathfrak{F}_b$ also, wenn $b > a$ ist, ganz im Inneren von $\mathfrak{F}_a$ liegt. Wächst a ins Unendliche, so konvergiert $\mathfrak{F}_a$ gegen ein Grenzgebilde, das eine vierdimensionale Fläche $\mathfrak{F}$ oder eine Ausartung sein kann. Für alle Punkte im Inneren und auf dem Rande von $\mathfrak{F}$ gilt (79) identisch in a, d. h. es ist für diese Punkte

$$(80) \qquad (\lambda^4)_2 \int_0^\infty |\beta_3|^2 dt \leqq l_2,$$

und für die Randpunkte gilt offenbar

$$(81) \qquad \int_0^\infty |\beta_3|^2 dt = l_2,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$(82) \qquad [\beta_{32} \beta_{31}]_\infty = \lim_{a=\infty} [\beta_{32} \beta_{31}]_a = 0.$$

Ganz analoge Überlegungen führen zu dem Ergebnis, daß die zweite der Gleichungen (53) bzw. (54),

$$(83) \qquad [\beta_1 \bar{\beta}_1]_a = 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^a |\beta_1|^2 dt = n_2,$$

eine ganz im Endlichen gelegene Fläche $\mathfrak{G}_a$ zweiten Grades im (m, n)-Raume darstellt, deren Schnitt mit $m = \text{const}$ einen Kreis liefert, und deren größter Kreis in bezug auf n den Durchmesser

$$(84) \qquad 2r_{n_a} = n^* - n_* = \frac{1}{[\eta_{42}\eta_{41}]_a} = \frac{1}{(\lambda^4)_2 \int_0^a |\eta_4|^2 dt}$$

hat. Zwei zu verschiedenen Werten a und b $(b > a)$ gehörige Flächen $\mathfrak{G}_a$ und $\mathfrak{G}_b$ haben keinen Punkt gemeinsam, und es ist

$$(85) \qquad \left[\int_0^a |\beta_1|^2 dt\right]_{n_2=0} > 0,$$

so daß $\mathfrak{G}_b$ ganz im Inneren von $\mathfrak{G}_a$ liegt, und mithin alle Punkte im Inneren von und auf $\mathfrak{G}_a$ durch die Ungleichung

$$(86) \qquad \int_0^a |\beta_1|^2 dt \leqq n_2$$

charakterisiert sind. $\mathfrak{G}_a$ konvergiert mit unendlich wachsendem a gegen eine vierdimensionale Fläche $\mathfrak{G}$ oder deren Ausartung. Für alle Punkte

im Inneren und auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ gilt (86) für jedes a, es ist also

$$\int_0^\infty |\beta_1|^2 dt \leqq n_2, \tag{87}$$

und speziell für den Rand gilt

$$\int_0^\infty |\beta_1|^2 dt = n_2, \tag{88}$$

oder

$$[\beta_{12}\beta_{11}]_\infty = \lim_{a=0} [\beta_{12}\beta_{11}]_a = 0. \tag{89}$$

Aus (82) und (89) schließen wir, daß die Differentialgleichung (37) stets zwei im Intervall $(0, \infty)$ absolut quadratisch integrierbare Integrale β_3 und β_1 besitzt. Konvergieren die Kreise $\mathfrak{K}_{l_a}$ und $\mathfrak{K}_{n_a}$ gegen zwei Grenzkreise $\mathfrak{K}_l$ und $\mathfrak{K}_n$, so folgt aus (76) und (84), daß auch η_2 und η_4 und mithin alle Integrale von (37) absolut quadratisch integrierbar sind. Dasselbe ergibt sich, falls die Gleichungen (82) und (89) für mindestens zwei verschiedene Werte m' und m'' erfüllt sind. Dieser Fall liefert daher für die folgende Diskussion nichts Neues, und es wird genügen, nur solche Randbedingungen (49) zuzulassen, für die m fest, z. B. dauernd im Grenzpunkte oder im Mittelpunkte des Grenzkreises bleibt. Diese Einschränkung ist erlaubt, da aus der Greenschen Funktion folgt, daß m in β_3 und β_1 in demselben Gebiet variiert. Für festes a entsprechen mithin bei konstantem m der Kreis in der l-Ebene und der in der n-Ebene einander punktweise. Natürlich ist nicht zu erwarten, daß zwei zu verschiedenen Werten a und b, aber zu gleichem m gehörige Kreise $\mathfrak{K}_{l_a}$, $\mathfrak{K}_{l_b}$ bzw. $\mathfrak{K}_{n_a}$, $\mathfrak{K}_{n_b}$ zu denselben Randbedingungen (49) gehören. Das ist für die folgenden Betrachtungen auch nicht erforderlich, sondern es genügt zu wissen, daß sie auf den Flächen $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{F}_b$ bzw. $\mathfrak{G}_a$ und $\mathfrak{G}_b$ liegen, die alle Punkte l, m bzw. m, n enthalten, für die die Greensche Funktion an der Stelle a zwei reelle Bedingungen erfüllt. Betrachten wir nun nicht mehr die Flächen $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{G}_a$, sondern nur noch die Kreise $\mathfrak{k}_{l_a}$ und $\mathfrak{k}_{n_a}$, die durch $m = \mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{F}_a$ bzw. $\mathfrak{G}_a$ ausgeschnitten werden, so ist ersichtlich, daß $\mathfrak{k}_{l_a}$ und $\mathfrak{k}_{n_a}$ mit wachsendem a entweder gegen zwei Grenzkreise $\mathfrak{k}_l$, $\mathfrak{k}_n$, oder gegen einen dieser Kreise $\mathfrak{k}_l$ (bzw. $\mathfrak{k}_n$) und einen Grenzpunkt $\mathfrak{N}(\mathfrak{L})$, oder gegen zwei Grenzpunkte $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ konvergieren. Im ersten, im Grenzkreisfalle, sind die Radien von $\mathfrak{k}_l$ und $\mathfrak{k}_n$ charakterisiert durch

$$r_l \leqq \frac{1}{2(\lambda^4)_2 \int_0^\infty |\eta_2|^2 dt}, \quad r_n \leqq \frac{1}{2(\lambda^4)_2 \int_0^\infty |\eta_4|^2 dt}, \tag{90}$$

d. h. die Differentialgleichung (37) hat vier linear unabhängige im Intervall $(0, \infty)$ absolut quadratisch integrierbare Integrale. Liegt der Fall

eines Grenzkreises und eines Grenzpunktes vor, so ist außer β_3 und β_1 noch ein weiteres Integral, etwa η_2 absolut quadratisch integrierbar. Dann führen wir ein neues Fundamentalsystem H_1, H_2, H_3, H_4 ein durch

$$H_1 = \eta_1, \quad H_2 = \frac{\eta_2 - \eta_4}{\sqrt{2}}, \quad H_3 = \eta_3, \quad H_4 = \frac{\eta_2 + \eta_4}{\sqrt{2}} \tag{91}$$

und berechnen die zum Intervall $(0, \infty)$ gehörige Greensche Funktion wie oben. Wir gelangen dabei zu zwei absolut quadratisch integrierbaren Integralen B_3 und B_1, während weder H_2 noch H_4 absolut quadratisch integrierbar ist, so daß wir durch die Transformation (91) den Grenzkreis-Grenzpunktfall in einen Grenzpunktfall übergeführt haben. Hieraus aber folgt weiter, daß der Grenzkreis-Grenzpunktfall nicht vorkommen kann; denn konvergierte $\mathfrak{F}_a$ bei unendlich wachsendem a gegen eine Kreisscheibe, $\mathfrak{G}_a$ dagegen gegen einen Punkt, so gelangte man durch Variieren der Randbedingungen (49) zu verschiedenen Greenschen Funktionen. Führen wir andererseits die Transformation (91) aus, so erhalten wir in der Grenze, wie wir auch die Bedingungen (49) variieren, dieselbe Greensche Funktion. Hierin liegt ein Widerspruch, da die zu festen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig ist. Zusammenfassend erhalten wir also das Resultat:

Bei unendlich wachsendem a konvergieren die Flächen $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{G}_a$ entweder gegen zwei Grenzflächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ oder gegen zwei Grenzpunkte $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$. Die Radien der größten Kreise der Grenzflächen für m = const sind

$$r_I = \frac{1}{2(\lambda^4)_2 \int_0^\infty |\eta_2|^2 dt}, \quad r_{II} = \frac{1}{2(\lambda^4)_2 \int_0^\infty |\eta_4|^2 dt}. \tag{92}$$

Die Differentialgleichung (37) *besitzt im Grenzpunktfalle zwei und nur zwei im Intervalle* $(0, \infty)$ *absolut quadratisch integrierbare, linear unabhängige Integrale*

$$\beta_3 = \eta_3 + \mathfrak{L}\eta_2 + \mathfrak{M}\eta_4, \quad \beta_1 = \eta_1 + \mathfrak{M}\eta_2 + \mathfrak{N}\eta_4; \tag{93}$$

im Falle zweier Grenzflächen sind dagegen auch η_2 und η_4 und mithin alle Integrale von (37) *absolut quadratisch integrierbar.*

Daß auch im Grenzpunktfalle

$$\int_0^\infty |\beta_3|^2 dt = \mathfrak{L}_2, \quad \int_0^\infty |\beta_1|^2 dt = \mathfrak{N}_2 \tag{94}$$

gilt, ergibt sich folgendermaßen. Angenommen $\mathfrak{K}_{l_a}$ konvergiere gegen einen Grenzpunkt $\mathfrak{L}$; dann folgt[4]), wenn $\mathfrak{L}_a$ der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_{l_a}$ ist, für $m = \mathfrak{M}$:

[4]) Weyl, l. c. S. 228.

$$(95)\qquad (\lambda^4)_s\int_0^a |\beta_s|^2\,dt - l_s = (\lambda^4)_s\int_0^a |\eta_2|^2\,dt\cdot\{|l-\mathfrak{L}_a|^2 - r_{l_a}^2\}$$
$$\geqq -r_{l_a}^2\int_0^a |\eta_2|^2\,dt = -\frac{1}{2}r_{l_a},$$

und mithin wird im vorliegenden Grenzpunktfalle $(\lim_{a=\infty} r_{l_a} = 0)$

$$(96)\qquad \int_0^\infty |\beta_s|^2\,dt - \mathfrak{L}_2 \geqq 0.$$

Aus (96) und der für den Grenzpunkt gültigen Ungleichung (79) folgt aber die Behauptung. Aus (79) und (95) folgt allgemein[4]), mag l Grenzpunkt oder Punkt im Inneren oder auf dem Rande des Grenzkreises sein:

$$(97)\qquad (\lambda^4)_s\int_0^a |\beta_s|^2\,dt \geqq l_s - \frac{r_{l_a}}{2} \geqq (\lambda^4)_s\int_0^\infty |\beta_s|^2\,dt - \frac{1}{2}r_{l_a},$$

$$(98)\qquad \int_0^\infty |\beta_s|^2\,dt \leqq \frac{r_{l_a}}{2(\lambda^4)_s} = \frac{1}{2(\lambda^4)_s^2\int_0^a |\eta_2|^2\,dt},$$

und mithin

$$(99)\qquad \int_0^a |\eta_2|^2\,dt\cdot\int_0^\infty |\beta_s|^2\,dt \leqq \frac{1}{4[(\lambda^4)_s]^2}.$$

Entsprechend erhalten wir für β_1 und η_4 die Beziehungen:

$$(100)\qquad \int_0^\infty |\beta_1|^2\,dt \leqq \frac{r_{n_a}}{2(\lambda^4)_s},$$

$$(101)\qquad \int_0^a |\eta_4|^2\,dt\cdot\int_0^\infty |\beta_1|^2\,dt \leqq \frac{1}{4[(\lambda^4)_s]^2}.$$

Wir zeigen noch, daß das Quadrat des absoluten Betrages von

$$\int_0^\infty G(\mu^4, s, t)\,g(t)\,dt = h(s)$$

im Intervall $(0, \infty)$ integrierbar ist, wenn $\int_0^\infty |g(t)|^2 dt \leqq 1$ ist. In der Tat sei $G^a(\mu^4, s, t)$ eine zum Intervall $(0, a)$ gehörige Greensche Funktion bei reellen Randbedingungen, für welche $m_a = \mathfrak{M}$. Dann ist

$$(102)\qquad \left|\int_0^a\!\!\int_0^a G^a(\mu^4, s, t)\,g(s)\,\bar g(t)\,dt\,ds\right| = \left|\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\int_0^a g(s)\varphi_\nu(s)\,ds\int_0^a \bar g(t)\varphi_\nu(t)\,dt}{\lambda_\nu - \mu^4}\right|$$
$$\leqq \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\left|\int_0^a g(s)\varphi_\nu(s)\,ds\right|^2}{\mu_2^4} \leqq \frac{\int_0^a |g(t)|^2\,dt}{\mu_2^4} \leqq \frac{1}{\mu_2^4},$$

wo φ_ν und λ_ν die Eigenfunktionen und Eigenwerte von G^a sind und $\bar{g}$ die konjugierte Funktion zu g.

Nun ist aber

$$\begin{aligned}(103)\quad \int_0^a G^a(\mu^4, s, t) g(t)\,dt = \int_0^a G(\mu^4, s, t) g(t)\,dt + (l_a - \mathfrak{L})\,\eta_2(s)\int_0^a \eta_2(t) g(t)\,dt \\ + (n_a - \mathfrak{N})\,\eta_4(s)\int_0^a \eta_4(t) g(t)\,dt,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^a G(\mu^4, s, t) g(s)\bar{g}(t)\,ds\,dt \\ (104)\quad &= \int_0^a\int_0^a G^a(\mu^4, s, t) g(s)\bar{g}(t)\,ds\,dt + (\mathfrak{L} - l_a)\left|\int_0^a \eta_2(t) g(t)\,dt\right|^2 \\ &\quad + (\mathfrak{N} - n_a)\left|\int_0^a \eta_4(t) g(t)\,dt\right|^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt im Verein mit (92) und (102):

$$(105)\qquad \left|\int_0^a\int_0^a G(\mu^4, s, t) g(s)\bar{g}(t)\,ds\,dt\right| \leqq \frac{3}{\mu_1^4},$$

und dasselbe gilt von $\int_0^a\int_0^a G(\mu^4, s, t) g(s) h(t)\,ds\,dt$, wenn $\int_0^a |h(s)|^2 ds \leqq 1$. Hieraus ergibt sich weiter:

$$(106)\qquad \int_0^a\left|\int_0^a G(\mu^4, s, t) g(t)\,dt\right|^2 ds < \frac{9}{\lambda_1^2}.$$

Also ist der Ausdruck (102) im Intervall $(0, \infty)$ absolut quadratisch integrierbar.

Zweiter Teil.

Darstellung willkürlicher Funktionen.

4.

Wir wollen jetzt ausschließlich den Fall zweier Grenzpunkte betrachten und die zu der Differentialgleichung (37) gehörige Darstellung willkürlicher Funktionen entwickeln. Mit Hilfe der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehungen (76), (84), (99) und (101) werden sich die bekannten Beziehungen für die zu endlichen Intervallen $(0, a)$ gehörigen Greenschen Funktionen G^a auf $G = G^\infty$ übertragen, sowie die für die Darstellung willkürlicher Funktionen erforderlichen Abschätzungen durchführen lassen. Wir werden fortan in (30) $p(s) = 1$ annehmen, so daß (37) übergeht in

(107) $$\frac{d^4u}{ds^4}+\frac{d}{ds}\left(q\frac{du}{ds}\right)+(r+\lambda^4)u=L(u)+\lambda^4u=0,$$

wo $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, q und r reell, q stetig differentiierbar, r stetig, q, q' und r beschränkt sind. Die vier partikulären Integrale η_1, η_2, η_3, η_4 werden wir so normieren, daß bei $s=0$

(108)

	η	η'	η''	$q\eta'+\eta'''$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

ist und η_2, η_4, β_3 und β_1 an den Stellen 0 und a die Randbedingungen

(109) $$\eta_2(0)=\eta_2''(0)=0,\quad \eta_4(0)=\eta_4''(0)=0,$$

(110) $$\begin{aligned}&y_1\beta_3-y_2\beta_3'+y_3\beta_3''+y_4(q\beta_3'+\beta_3''')=0,\\&y_1\beta_1-y_2\beta_1'+y_3\beta_1''+y_4(q\beta_1'+\beta_1''')=0,\qquad (s=a)\end{aligned}$$

erfüllen.

Sei nun $f(s)$ im Intervalle $(0,\infty)$ viermal stetig differentiierbar und $f(0)=f''(0)=0$. Genügt dann f für ein festes $\lambda=\mu=\mu_1+i\mu_2$ der Differentialgleichung

(111) $$L(f)+\mu^4f=-g(s),$$

und sind f und g von 0 bis ∞ absolut quadratisch integrierbar, so ist

(112) $$f(s)=\int_0^\infty G(\mu^4,s,t)g(t)\,dt;$$

denn die rechte Seite ist eine Lösung von (111), die absolut quadratisch integrierbar ist und in $s=0$ die beiden Randbedingungen erfüllt.

Ferner gilt die Relation:

(113) $$G(\lambda^4,s,t)=G(\mu^4,s,t)+(\lambda^4-\mu^4)\int_0^\infty G(\lambda^4,s,r)G(\mu^4,r,t)\,dr.$$

Denn die rechte Seite genügt der Differentialgleichung (107), hat bei $s=t$ die verlangte Unstetigkeit in der dritten Ableitung, erfüllt bei $s=0$ die Randbedingungen und ist absolut quadratisch integrierbar im Intervall $(0,\infty)$.

Aus (112) und (113) folgt die Identität:

(114) $$\frac{f(s)}{\lambda^4-\mu^4}=\frac{1}{\lambda^4-\mu^4}\int_0^\infty G(\lambda^4,s,t)g(t)\,dt-\int_0^\infty G(\lambda^4,s,t)f(t)\,dt,$$

und endlich folgern wir aus (113) vermöge der Neumannschen Reihenentwicklung, daß $G(\lambda^4,s,t)$ und mithin auch $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in dem von uns betrachteten Gebiete $\lambda_1\lesseqgtr\lambda_2\gtrless0$ analytische Funktionen von λ sind, so daß wir den Cauchyschen Residuensatz anwenden können.

5.

Wir benutzen im folgenden einen Satz über die asymptotische Darstellung von Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen, den Herr Birkhoff[5]) allgemein für Gleichungen n-ter Ordnung von der Form:

$$\frac{d^n z}{du^n} + \lambda a_{n-1}(x, \lambda) \frac{d^{n-1} z}{du^{n-1}} + \ldots + \lambda^n a_0(x, \lambda) z = 0$$

bewiesen hat, wenn die $a_i(x, \lambda)$ für $a \leqq x \leqq b$ und $|\lambda| > R$ beschränkt sind, und der in unserem Falle $n = 4$, $a_3 = 0$, $a_2 = \frac{q}{\lambda^2}$, $a_1 = \frac{q'}{\lambda^3}$, $a_0 = \frac{r + \lambda^4}{\lambda^4}$ lautet:

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, *die Wurzeln der Gleichung*

(115) $$\varepsilon^4 + 1 = 0,$$

so geordnet, daß

(116) $$\Re(\lambda \varepsilon_1) \leqq \Re(\lambda \varepsilon_2) \leqq \Re(\lambda \varepsilon_3) \leqq \Re(\lambda \varepsilon_4),$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, für alle $s > 0$

(117) $$|e^{\varepsilon_1 \lambda s}| \leqq |e^{\varepsilon_2 \lambda s}| \leqq |e^{\varepsilon_3 \lambda s}| \leqq |e^{\varepsilon_4 \lambda s}|,$$

so gibt es vier partikuläre Integrale $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ *von:*

(118) $$L(u) + \lambda^4 u = 0$$

so, daß

(119) $$\zeta_i(s, \lambda) = U_i(s, \lambda) + O\left(\left|\frac{e^{\varepsilon_i \lambda s}}{\lambda}\right|\right),$$

(120) $$\frac{\partial \zeta_i}{\partial s} = \frac{\partial U_i}{\partial s} + O(|e^{\varepsilon_i \lambda s}|)$$

ist, wo

(121) $$U_i(s, \lambda) = e^{\varepsilon_i \lambda s}$$

ist.

Aus diesen ζ_i setzen wir die Integrale η_i nach (108) zusammen und erhalten die asymptotische Darstellung:

(122) $$\begin{cases} \eta_1(s) = \frac{1}{2}(\cos \Lambda s + \cos i \Lambda s) + O\left(\left|\frac{e^{\Lambda_1 s}}{\Lambda}\right|\right), \\ \eta_2(s) = \frac{1}{2\Lambda}(\sin \Lambda s - i \sin i \Lambda s) + O\left(\left|\frac{e^{\Lambda_1 s}}{\Lambda^2}\right|\right), \\ \eta_3(s) = \frac{1}{2\Lambda^2}(-\cos \Lambda s + \cos i \Lambda s) + O\left(\left|\frac{e^{\Lambda_1 s}}{\Lambda^3}\right|\right), \\ \eta_4(s) = \frac{1}{2\Lambda^3}(-\sin \Lambda s - i \sin i \Lambda s) + O\left(\left|\frac{e^{\Lambda_1 s}}{\Lambda^4}\right|\right), \end{cases}$$

[5]) Trans. Am. Math. Soc. 9, S. 219f.

worin $A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\lambda$ gesetzt ist. Wir nehmen jetzt s fest und $a > 2s$ an. Um $\int\limits_0^s G(\lambda^4, s, t)\, g(t)\, dt$ abzuschätzen, schreiben wir es in der Form:

$$(123)\quad \left|\int\limits_0^s G(\lambda^4, s, t)\, g(t)\, dt\right| = \left|\int\limits_0^s (G(\lambda^4, s, t) - G^a(\lambda^4, s, t) + G^a(\lambda^4, s, t))\, g(t)\, dt\right|,$$

wo G^a eine zum Intervalle $(0, a)$ gehörige Greensche Funktion ist, deren Randbedingungen (49) so gewählt sind, daß $m = \mathfrak{M}$ ausfällt. Dann können wir auch schreiben:

$$(124)\quad \left|\int\limits_0^s G(\lambda^4, s, t)\, g(t)\, dt\right| = \left|\int\limits_0^s [(\mathfrak{L} - l_a)\,\eta_3(t)\,\eta_3(s) + (\mathfrak{N} - n_a)\,\eta_4(t)\,\eta_4(s) + G^a(\lambda^4, s, t)]\, g(t)\, dt\right|$$

$$\leq \left|(\mathfrak{L} - l_a)\,\eta_3(s)\int\limits_0^s \eta_3(t)\, g(t)\, dt\right| + \left|(\mathfrak{N} - n_a)\,\eta_4(s)\int\limits_0^s \eta_4(t)\, g(t)\, dt\right| + \left|\int\limits_0^s G^a(\lambda^4, s, t)\, g(t)\, dt\right|.$$

Nun ist nach (76)

$$(125)\quad |(\mathfrak{L} - l_a)\,\eta_3(s)| \leq \left|\frac{\eta_3(s)}{(A^4)_2 \int\limits_0^a |\eta_3|^2\, dt}\right|$$

$$= \left|\eta_3(s)\, A^3 \left\{4\,(A^4)_2 \int\limits_0^a \left[(\sin At - i \sin iAt)(\sin \bar{A}t - i \sin i\bar{A}t) + O\left(\frac{e^{A_2 s}}{|A|}\right)\right] dt\right\}^{-1}\right|$$

$$= \left|\eta_3(s)\left\{8\,(A^4)_2\left[\left(\frac{\sin 2iA_2 a}{2iA_2} - \frac{\sin 2A_2 a}{2A_2}\right) - i\left(\frac{\sin (A_1 - A_2)(1-i)a}{(A_1 - A_2)(1-i)} - \frac{\sin (A_1 + A_2)(1+i)a}{(A_1 + A_2)(1+i)}\right)\right.\right.\right.$$

$$- i\left(\frac{\sin (A_1 + A_2)(1-i)a}{(A_1 + A_2)(1-i)} - \frac{\sin (A_1 - A_2)(1+i)a}{(A_1 - A_2)(1+i)}\right)$$

$$\left.\left.\left. - \left(\frac{\sin 2A_1 a}{2A_1} - \frac{\sin 2iA_1 a}{2iA_1}\right) + O\left(\left|\frac{e^{A_2 a}}{|A|}\right|\right)\right]\right\}^{-1}\right|$$

$$= O\left(\frac{A e^{-A_2 (2a - s)}}{A_1 (A_2^2 - A_1^2)}\right).$$

Ist nun

$$(126)\quad \int\limits_0^\infty |g(t)|^2\, dt \leq 1,$$

so wird

$$(127)\quad \left|\int\limits_0^s \eta_3(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int\limits_0^s |\eta_3|^2\, dt} = O\left(\frac{e^{A_2 s}}{|A|\sqrt{A_2}}\right)$$

und folglich:

$$(128)\qquad \left|(\mathfrak{L} - l_s)\,\eta_3(s)\int_0^s \eta_3(t)\,g(t)\,dt\right| = O\left(\frac{1}{A_1\sqrt{A_2}\,(A_2^2 - A_1^2)}\right).$$

Analog erhalten wir:

$$(129)\qquad \left|(\mathfrak{N} - n_s)\,\eta_4(s)\int_0^s \eta_4(t)\,g(t)\,dt\right| = O\left(\frac{1}{A_1\sqrt{A_2}\,(A_2^2 - A_1^2)}\right).$$

Für $\int_0^s G^*(\lambda^4, s, t)\,g(t)\,dt$ ergibt sich unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung[*]):

$$(130)\qquad \left|\int_0^s G^*(\lambda^4, s, t)\,g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_0^s |G^*(\lambda^4, s, t)|^2\,dt \cdot \int_0^s |g(t)|^2\,dt}$$

$$\leq \sqrt{\int_0^s |G^*(\lambda^4, s, t)|^2\,dt} = O\left(|A^{-7/4}|\right).$$

Aus (128), (129) und (130) folgt:

$$(131)\qquad \int_0^s G(\lambda^4, s, t)\,g(t)\,dt = O\left(\frac{1}{A_1\sqrt{A_2}\,(A_2^2 - A_1^2)}\right).$$

Um $\int_s^T G(\lambda^4, s, t)\,g(t)\,dt$ abzuschätzen, ziehen wir die Ungleichungen (99) und (101) heran, aus denen folgt:

$$(132)\qquad \left|\eta_3(s)\int_0^T \beta_{3\mathfrak{L}}(t)\,g(t)\,dt\right| < \frac{|\eta_3(s)|}{2(\lambda^4)_s\int_0^s |\eta_3|^2\,dt} = O\left(\frac{1}{A_1\sqrt{A_2}\,(A_2^2 - A_1^2)}\right),$$

und ebenso

$$(133)\qquad \left|\eta_4(s)\int_0^T \beta_{1\mathfrak{N}}(t)\,g(t)\,dt\right| = O\left(\frac{1}{A_1\sqrt{A_2}\,(A_2^2 - A_1^2)}\right),$$

so daß wir schließlich zu dem Resultat gelangen:

$$(134)\qquad \left|\int_0^T G(\lambda^4, s, t)\,g(t)\,dt\right| = O\left(\frac{1}{A_1\sqrt{A_2}\,(A_2^2 - A_1^2)}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}\,(\lambda_1 - \lambda_2)}\right).$$

6.

Sei $\mathfrak{K}_S$ ein Kreissektor in der komplexen λ-Ebene, dessen begrenzende Radien AB und AC von der Länge S den Geraden $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_2$ im Abstande

---

*) Vgl. G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc. 9, S. 373f. J. Tamarkine, Rend. del Circ. Mat. Palermo 34, S. 345f.

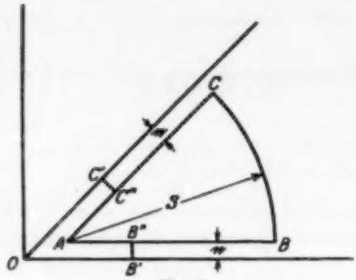

Fig. 2.

$$(135) \qquad \mathfrak{t} = e^{-S^{3/4}}$$

parallel laufen (Fig. 2). Dann ist

$$(136) \qquad \int_0^\infty G(\mu^4, s, t) g(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_S} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) g(t) dt.$$

Mit wachsendem S konvergiert der Beitrag, den das Integral längs des Bogens BC liefert, gegen Null. Bedeutet daher W_S den Weg CAB, so geht (136) über in

$$(137) \qquad \int_0^\infty G(\mu^4, s, t) g(t) dt = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) g(t) dt.$$

Entsprechend wird

$$(138) \qquad 0 = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) g(t) dt,$$

$$(139) \qquad 0 = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda + i\mu} \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) g(t) dt,$$

$$(140) \qquad 0 = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda - i\mu} \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) g(t) dt,$$

und durch Addition von (137) bis (140)

$$(141) \qquad \int_0^\infty G(\mu^4, s, t) g(t) dt = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{4\lambda^3 d\lambda}{\lambda^4 - \mu^4} \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) g(t) dt.$$

Diese Gleichung können wir wegen der Identität (114) auch schreiben:

$$(142) \quad f(s) = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{W_S} \frac{4\lambda^3 d\lambda}{\lambda^4 - \mu^4} f(s) + \int_{W_S} 4\lambda^3 d\lambda \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) f(t) dt \right].$$

Da $f(s)$ reell ist, kommt der reelle Teil der rechten Seite in Betracht. Nun ist aber

$$(143) \qquad \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_S} \frac{4\lambda^3 d\lambda}{\lambda^4 - \mu^4} f(s) = \frac{1}{2} f(s),$$

so daß wir zu dem folgenden Frgebnis gelangen:

Jede viermal stetig differenzierbare, im Intervalle $(0, \infty)$ absolut quadratisch integrierbare Funktion $f(s)$, für die $f(0) = f''(0) = 0$ ist, läßt sich darstellen durch:

$$(144)\qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 4\lambda^3\, d\lambda \int_0^\infty G(\lambda^4, s, t) f(t)\, dt$$

$$= \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 4\lambda^3\, d\lambda \int_0^\infty \big(\eta_2(s)\beta_{3\mathfrak{L}}(t) + \eta_4(s)\beta_{1\mathfrak{R}}(t)\big) f(t)\, dt$$

$$+ \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 4\lambda^3\, d\lambda \int_0^s \big(\eta_2(t)\eta_3(s) - \eta_3(t)\eta_2(s)$$

$$+ \eta_4(t)\eta_1(s) - \eta_1(t)\eta_4(s)\big) f(t)\, dt.$$

Der zweite Ausdruck rechts verschwindet. Um dies zu zeigen, schätzen wir den imaginären Teil u_2 von:

$$(145)\quad u_1 + i u_2 = \eta_2(t)\eta_3(s) - \eta_3(t)\eta_1(s) + \eta_4(t)\eta_1(s) - \eta_1(t)\eta_4(s)$$

ab. Integrieren wir längs eines endlichen Weges $W_S' = C''C'OB'B''$, wo B' und C' fest und $C'C''$ und $B'B''$ gerade Strecken von der Länge ε sind (Fig. 2), so ist

$$(146)\qquad \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 4\lambda^3\, d\lambda \int_0^\infty (u_1 + i u_2) f(t)\, dt = 0.$$

Wir können uns daher auf die Strecken CC'' und $B''B$ beschränken, für die die Birkhoffschen Abschätzungen gelten. u_2 ist ein Integral der Differentialgleichung

$$(147)\qquad \mathfrak{L}(u_2) + (\lambda^4)_1 u_2 = -(\lambda^4)_2 u_1,$$

das für $s = t$ mit seinen Ableitungen verschwindet, wie unmittelbar aus (145) und der Normierung hervorgeht.

Sind daher v_1, v_2, v_3, v_4 vier linear unabhängige Integrale von

$$(148)\qquad L(v) + (\lambda^4)_1 v = 0,$$

so hat das allgemeine Integral von (147) die Gestalt:

$$u_2(s) = + \int_t^s \sum_{i=1}^4 v_i(r) V_i(t) (\lambda^4)_2 u_1(r)\, dr,$$

wo die V_i ebenfalls vier linear unabhängige Integrale von (148) sind. Diese sind aber längs W_S vom Charakter e^{Ss}, was auch von u_1 wegen der

Abschätzungen für die η gilt, während $(\lambda^4)_3 = O(e^{-S^{9/4}} S^8)$ ist, so daß man erhält:

$$u_3(s) = O(S^8 e^{3Ss - S^{9/4}}) = O(S^8 e^{-S}),$$

woraus das Verschwinden unseres Ausdrucks folgt.

Wir erhalten somit das folgende Resultat:

Jede viermal stetig differenzierbare, im Intervall $(0, \infty)$ *absolut quadratisch integrierbare Funktion* $f(s)$ *läßt sich darstellen durch*

$$\begin{aligned} (149) \quad f(s) &= \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 4 \lambda^3 d\lambda \left[\eta_2(s) \int_0^\infty \beta_3(t) f(t)\, dt + \eta_4(s) \int_0^\infty \beta_1(t) f(t)\, dt \right] \\ &= \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} 4 \lambda^3 d\lambda \left[\eta_2(s) \int_0^\infty \big(\eta_3(t) + \mathfrak{L}\, \eta_2(t) + \mathfrak{M}\, \eta_4(t) \big) f(t)\, dt \right. \\ &\qquad \left. + \eta_4(s) \int_0^\infty \big(\eta_1(t) + \mathfrak{M}\, \eta_2(t) + \mathfrak{N}\, \eta_4(t) \big) f(t)\, dt \right]. \end{aligned}$$

7.

Um die allgemeinen Entwicklungen an einem einfachen Beispiele zu veranschaulichen, behandeln wir kurz den Spezialfall $q = r = 0$, so daß unsere Differentialgleichung (107) übergeht in:

$$(150) \qquad \frac{d^4 u}{ds^4} + \lambda^4 u = 0.$$

Die in (108) definierten Integrale nehmen die Gestalt an:

$$(151) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1(s) &= \frac{1}{2}(\cos \Lambda s + \cos i \Lambda s), \qquad (\varepsilon\lambda = \Lambda), \\ \eta_2(s) &= \frac{1}{2\Lambda}(\sin \Lambda s - i \sin i \Lambda s), \\ \eta_3(s) &= \frac{1}{2\Lambda^2}(-\cos \Lambda s + \cos i \Lambda s), \\ \eta_4(s) &= \frac{1}{2\Lambda^3}(-\sin \Lambda s - i \sin i \Lambda s). \end{aligned} \right.$$

Die Integrale β_3 und β_1 bestimmen sich am einfachsten aus der Eigenschaft, im Intervall $(0, \infty)$ bei komplexem λ^4 mit positivem Imaginärteil absolut quadratisch integrierbar zu sein, derzufolge $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ so bestimmt werden müssen, daß die Koeffizienten von $e^{-i\Lambda s}$ und $e^{\Lambda s}$ Null werden. So wird:

$$(152) \qquad \mathfrak{L} = -\frac{1+i}{2\Lambda}, \qquad \mathfrak{M} = -\frac{1-i}{2}\Lambda, \qquad \mathfrak{N} = -\frac{1+i}{2}\Lambda^3,$$

$$
(153) \qquad \begin{cases} \beta_3(s) = \eta_3 + \mathfrak{L}\,\eta_3 + \mathfrak{M}\,\eta_4 = -\dfrac{1}{2\Lambda^2}(e^{i\Lambda s} - e^{-\Lambda s}), \\[2mm] \beta_1(s) = \eta_1 + \mathfrak{M}\,\eta_2 + \eta_4 = \dfrac{1}{2}(e^{i\Lambda s} + e^{-\Lambda s}). \end{cases}
$$

Die Greensche Funktion wird in diesem Falle:

$$
\begin{aligned}
(154)\ G(\lambda^4, s, t) &= \frac{1}{4\Lambda^3}\left\{ie^{i\Lambda t}(e^{i\Lambda s} - e^{-i\Lambda s}) - e^{-\Lambda t}(e^{-\Lambda s} - e^{\Lambda s})\right\} \text{ für } s \leqq t, \\
&= \frac{1}{4\Lambda^3}\left\{ie^{i\Lambda s}(e^{i\Lambda t} - e^{-i\Lambda t}) - e^{-\Lambda s}(e^{-\Lambda t} - e^{\Lambda t})\right\} \text{ für } s \leqq t,
\end{aligned}
$$

während die unter den angeführten Beschränkungen willkürliche Funktion $f(s)$ die Darstellung gestattet:

$$
\begin{aligned}
(155) \qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i} \int_{W_S} \frac{d\Lambda}{s}\Big\{&(e^{i\Lambda s} - e^{-i\Lambda s}) \int_0^\infty ie^{i\Lambda t} f(t)\,dt \\
&- (e^{-\Lambda s} - e^{\Lambda s}) \int_0^\infty e^{-\Lambda t} f(t)\,dt\Big\}.
\end{aligned}
$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $\beta_3, \beta_1, \eta_3, \eta_4$ für reelle λ reell sind, so daß das Integral in (155) über die reelle Achse verschwindet. Also liegt das Spektrum der Differentialgleichung (150) auf der Halbachse der reellen negativen λ^4.

(Eingegangen am 1. 8. 1920).

Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes mit Hilfe der elliptischen Funktionen.

Von

Lothar Koschmieder in Breslau.

In dem Aufsatze: Application de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante beweist Eisenstein[1]) das quadratische und das biquadratische Reziprozitätsgesetz mit Hilfe der trigonometrischen und der lemniskatischen Funktionen. Er fügt die Bemerkung hinzu, daß man, um das kubische Reziprozitätsgesetz zu gewinnen, an Stelle der bei den genannten Beweisen benutzten Differentialgleichungen $dx = dv\sqrt{1-x^2}$ und $dx = dv\sqrt{1-x^4}$ die folgende: $dx = dv\sqrt{1-x^3}$ zu betrachten habe. Henry J. S. Smith[2]) bedauert, daß Eisenstein nicht näher auf diesen Gegenstand eingegangen sei, zumal keine das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ entsprechend behandelnde Arbeit vorliege. Diese Lücke auszufüllen ist Aufgabe der folgenden Zeilen.

§ 1.

Die transzendente Hilfsfunktion φu.

Als transzendentes Hilfsmittel zum Beweise des arithmetischen Satzes verwenden wir nicht die erwähnte von Eisenstein angegebene Differentialgleichung, sondern die folgende

$$\sqrt{3}\,du = \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}; \tag{1}$$

dieses Differential besitzt nämlich im Gegensatz zu dem ersten die für unsern Zweck später (vgl. (13)) wesentliche Eigenschaft, bei der Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ seine Form (vom Vorzeichen abgesehen) zu behalten.

---

[1]) Mathematische Abhandlungen, Berlin 1847, S. 121 ff.

[2]) Report on the theory of numbers (Collected mathematical papers, Oxford 1894) S. 91.

Man bestätigt leicht[3]), daß das Integral der Differentialgleichung (1) eine *äquianharmonische* Funktion, nämlich in der Weierstraßschen Bezeichnung

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\wp'(u+v)-\sqrt{3}}{\wp'(u+v)+\sqrt{3}}, \\ g_2 = 0, \quad g_3 = 1, \quad e_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}, \quad e_3 = \varepsilon e_2, \quad e_1 = \varepsilon^2 e_2 \end{cases}$$

ist, wenn v einen Festwert und ε eine komplexe dritte Einheitswurzel bedeutet, so daß etwa die Größen

$$2\omega = 2\int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3-1}}$$

und $2\varepsilon\omega$ als Hauptperioden der elliptischen Funktion gewählt werden können. Im besonderen führen wir

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\wp' u+\sqrt{3}}{\wp' u-\sqrt{3}} = \varphi u, \\ \dfrac{1}{\varphi\left(u-\frac{2\omega}{3}\right)} = \dfrac{\wp'\left(u-\frac{2\omega}{3}\right)-\sqrt{3}}{\wp'\left(u-\frac{2\omega}{3}\right)+\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}\,\dfrac{\wp u}{\wp' u-\sqrt{3}}\ ^{4)} = \psi u \end{cases}$$

als Hilfsfunktionen unseres Beweises ein, deren Eigenschaften wohl auch über diesen Zweck hinaus Beachtung verdienen. Es ist

$$(4)\qquad \varphi u^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi' u, \qquad \varphi u^3 + \psi u^3 = 1\ ^{5)},$$

$$(5)\qquad \psi(-u) = -\frac{\psi u}{\varphi u}, \qquad \varphi(-u) = \frac{1}{\varphi u}.$$

Aus der einfachen komplexen Multiplikation der äquianharmonischen $\wp$-Funktion[6])

$$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon\wp u, \qquad \wp'(\varepsilon u) = \wp' u$$

folgt

$$(6)\qquad \varphi(\varepsilon u) = \varphi u, \qquad \psi(\varepsilon u) = \varepsilon\psi u$$

und

$$(7)\quad \varphi\left[u + \frac{2\omega}{3}(1-\varepsilon)\right] = \varepsilon\varphi u, \qquad \varphi\left[u + \frac{2\omega}{3}(1-\varepsilon^2)\right] = \varepsilon^2\varphi u.$$

---

[3]) Zur Überführung dieses und verwandter Differentiale in die elliptische Normalform vgl. O. Röthig, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 56, S. 198ff.

[4]) Greenhill, The applications of elliptic functions, London 1892, p. 253, ex. 2.

[5]) Es ist $\varphi u^3 = (\varphi(u))^3$ zu lesen und entsprechend in ähnlichen Fällen.

[6]) Greenhill, a. a. O. S. 203.

§ 2.

Die komplexe Multiplikation der Funktionen $\varphi u, \psi u$.

Von dem Additionstheorem der Funktionen $\varphi u, \psi u$[7])

$$
(8) \qquad \begin{cases} \varphi(u+v) = \dfrac{\varphi u\, \varphi v(\varphi u - \varphi v) + \psi u\, \psi v(\psi u - \psi v)}{\varphi u - \varphi v - \psi u\, \psi v(\varphi u\, \psi v - \psi u\, \varphi v)}, \\ \psi(u+v) = -\dfrac{\psi u - \psi v + \varphi u\, \varphi v(\varphi u\, \psi v - \psi u\, \varphi v)}{\varphi u - \varphi v - \psi u\, \psi v(\varphi u\, \psi v - \psi u\, \varphi v)} \end{cases}
$$

kann man, was wohl bisher noch nicht geschehen, zur Multiplikation des Arguments mit einer *natürlichen* Zahl übergehen. Setzt man in (8) $u = v$, so erhält man die Verdoppelungsformeln

$$
\varphi(2u) = \frac{1}{\varphi u}\, \frac{2\varphi u^3 - 1}{2 - \varphi u^3},
$$

$$
\psi(2u) = \frac{\psi u}{\varphi u}\, \frac{2 - \psi u^3}{1 + \psi u^3}, \qquad \psi(-2u) = \psi u\, \frac{\psi u^3 - 2}{1 - 2\psi u^3};
$$

weiter ergibt sich

$$
\varphi(3u) = \frac{1 + 3\varphi u^3 - 6\varphi u^6 + \varphi u^9}{1 - 6\varphi u^3 + 3\varphi u^6 + \varphi u^9},
$$

$$
\psi(3u) = 3\varphi u\, \psi u\, \frac{1 - \psi u^3 + \psi u^6}{1 + 3\psi u^3 - 6\psi u^6 + \psi u^9}.
$$

Es sind also $\varphi(2u)$, $\varphi(3u)$ und wegen (4) $\frac{\psi(2u)}{\psi u}$, $\frac{\psi(3u)}{\psi u}$ rationale Funktionen von φu. Da aus (8) zu ersehen, daß für ganzzahliges k $\varphi((k+1)u)$, $\frac{\psi((k+1)u)}{\psi u}$ sich rational durch φu ausdrücken, wenn dies für $\varphi(ku)$, $\frac{\psi(ku)}{\psi u}$ gilt, so *sind* $\varphi(ku)$, $\frac{\psi(ku)}{\psi u}$ *rationale Funktionen von* φu, von deren besonderem, schon in den Formeln für $\varphi(2u)$, $\psi(-2u)$, $\varphi(3u)$ zutage tretendem Bau noch die Rede sein wird.

Die ganzzahlige Multiplikation der Funktionen φu, ψu ist als Sonderfall in ihrer *komplexen* Multiplikation enthalten, die man gleichfalls aus dem Additionstheorem erhält: Ersetzt man in (8) u durch ku, v durch $l\varepsilon u$, wo k und l natürliche Zahlen sind, so findet man mit Benutzung der Formeln (6) und des eben für $\varphi(ku)$, $\varphi(lu)$, $\frac{\psi(ku)}{\psi u}$, $\frac{\psi(lu)}{\psi u}$ gewonnenen Ergebnisses, daß für

$$
k + l\varepsilon = \mu
$$

$\varphi(\mu u)$ *und* $\frac{\psi(\mu u)}{\psi u}$ *rationale Funktionen von* φu *sind*, deren Form wir durch Betrachtung der Nullstellen und Pole der Funktion $\varphi(\mu u)$ ermitteln. Dabei beschränken wir uns auf *ausgezeichnete* Werte der komplexen ganzen

[7]) Ebd. S. 147.

Zahl μ, die wir so erklären: m sei eine natürliche Zahl von der Form $3m'+1$; dann gibt es unter den sechs assoziierten[*] Zahlen mit der Norm m *eine* μ von der Form $3g+1+3h\varepsilon$; diese heiße die ausgezeichnete.

Für die äquianharmonische $\wp$-Funktion gilt $\wp'(\mp\frac{2}{3}\omega)=\pm\sqrt{3}$ [**]; die für die rationale Darstellung von $\varphi(\mu u)=\frac{P(\varphi u)}{Q(\varphi u)}$ durch φu in Frage kommenden, sämtlich einfachen Nullstellen und Pole dieser Funktion sind daher durch die inkongruenten unter den Werten

$$v=\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\omega}{3}+2\lambda\omega\right), \tag{9}$$

$$w=\frac{1}{\mu}\left(-\frac{2\omega}{3}+2\lambda\omega\right), \tag{10}$$

$$\lambda=p+q\varepsilon$$

mit ganzen reellen p und q gegeben. Da die Kongruenz zweier Werte v, v' (w, w') nach den Perioden die Kongruenz der zugehörigen komplexen ganzen Zahlen λ, λ' nach dem Modul μ nach sich zieht und umgekehrt, da ferner in (10) der Wert $\lambda=-(g+h\varepsilon)$ einen Pol der Funktion φu selbst liefert und deswegen ausscheidet, ist der Grad des Polynoms $Q(\varphi u)$ gleich der Anzahl der Mitglieder eines vollständigen Restsystems (mod. μ) mit Ausschluß einer Klasse, also gleich $m-1$. Der Grad des Polynoms $P(\varphi u)$ ist m; in (9) sind sämtliche inkongruenten λ zulässig, unter denen im besonderen der Wert $\lambda=g+h\varepsilon$ den Faktor $\varphi u-\varphi\frac{2\omega}{3}=\varphi u$ liefert.

Bedeutet v eine bestimmte Nullstelle von $\varphi(\mu u)$, so sind mit v auch

$$v_1=\varepsilon v+\frac{2\omega}{3}(\varepsilon-\varepsilon^2)=\frac{1}{\mu}\left[\frac{2\omega}{3}+2\varepsilon\lambda\omega+2\varepsilon\omega((1-\varepsilon)(g+h\varepsilon)+1)\right],$$

$$v_2=\varepsilon^2 v+\frac{2\omega}{3}(\varepsilon^2-\varepsilon)=\frac{1}{\mu}\left[\frac{2\omega}{3}+2\varepsilon^2\lambda\omega+2\varepsilon^2\omega((1-\varepsilon^2)(g+h\varepsilon)+1)\right]$$

Nullstellen dieser Funktion. Dabei sind die Werte v, v_1, v_2 paarweise inkongruent, außer wenn v ein Periodendrittel ist. Dieser Fall liefert den für sich stehenden Faktor φu des Zählers; seine übrigen Faktoren $\varphi u-\varphi v$ schließen sich gemäß (7) zu $\frac{m-1}{3}$ Produkten von je dreien der Form

$$(\varphi u-\varphi v)(\varphi u-\varphi v_1)(\varphi u-\varphi v_2)$$
$$=(\varphi u-\varphi v)(\varphi u-\varepsilon\varphi v)(\varphi u-\varepsilon^2\varphi v)=\varphi u^3-\varphi v^3$$

zusammen. In gleicher Weise erkennt man den Nenner als rationale Funktion von φu^3.

---

[*] Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung, Leipzig 1872, S. 187.

[**] Greenhill, a. a. O. S. 316.

Da es nach (9) und (10) zu jeder Nullstelle v der Funktion $\frac{\varphi(\mu u)}{\varphi u}$ einen Pol w von der Art gibt, daß

$$v = -w \tag{11}$$

ist, kann man

$$\varphi(\mu u) = C \varphi u \prod \frac{1 - \varphi u^3 \varphi w^3}{\varphi u^3 - \varphi w^3}$$

setzen; wegen $\varphi 0 = 1$ findet man durch die Annahme $u = 0$ den Festwert C der Einheit gleich. Aus dem Ergebnisse

$$\varphi(\mu u) = \varphi u \prod \frac{1 - \varphi u^3 \varphi w^3}{\varphi u^3 - \varphi w^3} \tag{12}$$

erhält man mit Hilfe der aus (3) folgenden Beziehungen

$$\psi(\mu u) = \frac{1}{\varphi\left(\mu u - \frac{2\omega}{3}\right)} = \frac{1}{\varphi\left(\mu\left(u - \frac{2\omega}{3}\right)\right)},$$

$$\varphi w = \frac{1}{\psi t}, \qquad t = \frac{2\varrho\omega}{\mu}, \qquad \varrho = \lambda + g + h\varepsilon$$

und der Tatsache, daß der Wertedreiheit w, $w_1 = \varepsilon w - \frac{2\omega}{3}(1 - \varepsilon)$, $w_2 = \varepsilon^2 w - \frac{2\omega}{3}(1 - \varepsilon^2)$ die andere t, $t_1 = \varepsilon t$, $t_2 = \varepsilon^2 t$ entspricht, die endgültige Formel für die komplexe Multiplikation der Funktion ψu

$$\psi(\mu u) = \psi u \prod \frac{\psi u^3 - \psi t^3}{1 - \psi u^3 \psi t^3}; \tag{13}$$

dabei wird über die $\frac{1}{3}(m - 1)$ Reste ϱ der einen Gruppe eines vollständigen Restsystems (mod. μ) (mit Ausschluß der Nullklasse) multipliziert, dessen beide andern Gruppen von den Zahlen $\varepsilon\varrho$, $\varepsilon^2\varrho$ gebildet werden[10]). In der Gestalt

$$\frac{\psi(\mu u)}{\psi u} = \prod_{\varrho} \frac{x^3 - \alpha^3}{1 - \alpha^3 x^3}, \qquad x = \psi u, \qquad \alpha = \psi \frac{2\varrho\omega}{\mu} \tag{13a}$$

entspricht die Gleichung (13), die auf Grund der im Eingang vom § 1 angegebenen Eigenschaft auch aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{(1-y^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\mu\, dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ durch Übergang zu den reziproken Werten der Veränderlichen gewonnen werden kann, völlig der Formel von Eisenstein für sin am mv im lemniskatischen Falle[11]).

[10]) Bachmann, a. a. O. S. 191.

[11]) a. a. O. S. 126.

§ 3.

Das Reziprozitätsgesetz der kubischen Reste.

Die Zahlen ϱ mögen ein Drittelrestesystem der komplexen *Primzahl* μ bilden. Die Reste der Produkte der Zahlen ϱ mit einer durch μ nicht teilbaren Zahl ν sind zum Teil Zahlen ϱ', zum Teil Zahlen $\varepsilon\varrho'$, $\varepsilon^2\varrho'$, wenn ϱ' zum Drittelrestesystem gehört. Man kann dies nach (6) durch die Formel

$$\nu\varrho \equiv \varrho' \frac{\psi\frac{2\nu\varrho\omega}{\mu}}{\psi\frac{2\varrho'\omega}{\mu}} \pmod{\mu}$$

ausdrücken. Durch Multiplikation der den $\frac{1}{3}(m-1)$ Resten ϱ entsprechenden Kongruenzen und Division des Ergebnisses durch die durch μ nicht teilbare Zahl $\Pi\varrho = \Pi\varrho'$ findet man

$$\nu^{\frac{1}{3}(m-1)} \equiv \prod_{\varrho} \frac{\psi\frac{2\nu\varrho\omega}{\mu}}{\psi\frac{2\varrho\omega}{\mu}} \pmod{\mu}$$

und, wenn auch ν eine von $1-\varepsilon$ verschiedene komplexe Primzahl bedeutet, deren $n-1$ Reste sich auf die drei Gruppen σ, $\varepsilon\sigma$, $\varepsilon^2\sigma$ verteilen,

$$\mu^{\frac{1}{3}(n-1)} \equiv \prod_{\sigma} \frac{\psi\frac{2\mu\sigma\omega}{\nu}}{\psi\frac{2\sigma\omega}{\nu}} \pmod{\nu}.$$

Der Vergleich der jetzt bei *ausgezeichneten* Werten von μ und ν aus § 2, (13a) folgenden Formeln

$$\nu^{\frac{1}{3}(m-1)} \equiv \prod_{\varrho}\prod_{\sigma} \frac{\alpha^3-\beta^3}{1-\alpha^3\beta^3} \pmod{\mu}, \qquad \alpha = \psi\frac{2\varrho\omega}{\mu},$$

$$\mu^{\frac{1}{3}(n-1)} \equiv \prod_{\sigma}\prod_{\varrho} \frac{\beta^3-\alpha^3}{1-\alpha^3\beta^3} \pmod{\nu}, \qquad \beta = \psi\frac{2\sigma\omega}{\nu}$$

liefert bei Anwendung der üblichen Bezeichnung des kubischen Charakters

$$\left[\frac{\mu}{\nu}\right] = \left[\frac{\nu}{\mu}\right](-1)^{\frac{1}{3}(m-1)\frac{1}{3}(n-1)}.$$

Da m und n Zahlen von der Form $6n+1$ sind, ergibt sich das Reziprozitätsgesetz der kubischen Reste für zwei *ausgezeichnete* komplexe Primzahlen in derselben Form

$$\left[\frac{\mu}{\nu}\right] = \left[\frac{\nu}{\mu}\right],$$

in der es für zwei *primäre* solche Zahlen gilt[12]).

[12]) Bachmann, a. a. O. S. 198.

(Eingegangen am 1. 10. 1920.)

Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum.

(Erste Mitteilung.)

Von

B. Baule in Hamburg.

Inhalt.

Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich auf die Geometrie im „Riemannschen Raum", in dem die Maßbestimmung dadurch festgelegt wird, daß das Quadrat des Bogenelementes als eine beliebige positiv definite quadratische Differentialform mit veränderlichen Koeffizienten gegeben ist. Es wird unter anderem gezeigt:

1. Nur auf den Flächen mit konstantem Gaußschem Krümmungsmaß gibt es geschlossene Kurven mit konstanter geodätischer Krümmung, die sich bei Wahrung ihrer Eigenschaft auf jeden Flächenpunkt zusammenziehen lassen.
2. Nur in den Räumen mit konstantem Riemannschem Krümmungsmaß (Krümmungstensor) haben die geodätischen Kugeln $r =$ konst. in jedem Flächenpunkt dieselbe mittlere Krümmung.
3. Nur in Räumen mit konstantem Gaußschen (skalaren) Krümmungsmaß kann es geschlossene Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung geben, die sich bei Wahrung ihrer Eigenschaft auf jeden Raumpunkt zusammenziehen lassen.

In einer folgenden Arbeit werden verwandte Probleme behandelt[1]).

I. Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Problemstellung.

In der euklidischen Ebene kann man den Kreis auf zweierlei Art definieren:

1. als Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte die gleiche Entfernung haben,
2. als Kurve konstanter Krümmung, oder, was auf dasselbe hinausläuft, als Extremale des isoperimetrischen Problems.

Geht man von der ebenen Geometrie zur Geometrie auf einer krummen Fläche über, so behalten beide Arten der Definition ihren guten Sinn, und es fragt sich: Welche Kurve soll man auf der krummen Fläche als „Kreis" bezeichnen, die auf die erste, oder die auf die zweite Art definierte?

Es soll der kurzen Ausdrucksweise halber, entsprechend den beiden Definitionen, zwischen „*Entfernungskreisen*" und „*Krümmungskreisen*" unterschieden werden.

Es liegen die Fragen auf der Hand:

I. Wie muß die Fläche beschaffen sein, damit die Entfernungskreise zugleich Krümmungskreise sind?

II. Wie muß die Fläche beschaffen sein, damit die Krümmungskreise ebenso wie die hinreichend kleinen Entfernungskreise sämtlich geschlossene Kurven sind, jene also vor diesen nichts voraus haben.

Die Fläche werde als analytisch vorausgesetzt.

---

[1]) Die Fragen, die hier und später untersucht werden, sind zum großen Teil von W. Blaschke aufgeworfen worden. Ich will nicht unterlassen, ihm an dieser Stelle für die reichen Anregungen, die ich im letzten Jahr von ihm erfahren habe, zu danken.

§ 2.

Die Metrik der krummen Fläche

kann auf verschiedene Weise gegeben werden. Sie ist einerseits bestimmt, wenn man das Bogenelement ds bezogen auf irgendein Koordinatensystem der Fläche kennt, andererseits, wenn die Gaußsche Krümmung der Fläche als Funktion des Ortes bekannt ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn in einem Flächenpunkte die Krümmung und ihre sämtlichen Ableitungen nach der geodätischen Entfernung r von dem betr. Punkt, K_0, $\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}\right)_0$, ..., gegeben sind.

Legt man als Koordinaten auf der Fläche Polarkoordinaten zugrunde, indem man einen beliebigen Flächenpunkt O als Nullpunkt und eine beliebige Richtung in ihm als Nullrichtung wählt und jeden Punkt der Fläche durch seine geodätische Entfernung r von O und durch den Winkel φ bezeichnet, unter dem die den Punkt mit dem Nullpunkt verbindende geodätische Linie im Nullpunkt einläuft, so nimmt das Bogenelement nach Gauß die Gestalt an

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi)\, d\varphi^2. \tag{1}$$

Durch $G(r, \varphi)$ ist dann die Metrik der Fläche vollständig bestimmt. Das Gaußsche Krümmungsmaß $K(r, \varphi)$ der Fläche im Punkte r, φ drückt sich durch $G(r, \varphi)$ folgendermaßen aus:

$$K(r, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{G(r, \varphi)}}\, \frac{\partial^2 \sqrt{G(r, \varphi)}}{\partial r^2}. \tag{2}$$

Ist umgekehrt $K(r, \varphi)$ gegeben, so ist (2) eine Differentialgleichung für $\sqrt{G(r, \varphi)}$. Ihre Lösung ist vollständig bestimmt, wenn noch zwei Nebenbedingungen für $\sqrt{G(r, \varphi)}$ vorhanden sind, die die beiden in der allgemeinen Lösung von (2) auftretenden willkürlichen Funktionen von φ festlegen.

Zwei solche Nebenbedingungen für $\sqrt{G(r, \varphi)}$ sind vorhanden. Da im Unendlich-Kleinen jede krumme Fläche als eben angesehen werden kann, jeder Kreis also beim Zusammenschrumpfen seines Radius in einen ebenen Kreis übergeht, so muß der zum Winkel φ gehörige Bogen des Kreises $r =$ konst. in der Grenze $r \to 0$ zu null werden, für jedes φ; und es muß die Änderung des Bogens mit dem Radius in der Grenze $r \to 0$ gleich φ werden für jeden Wert von φ

$$\lim_{r=0} \int_0^{\varphi} \sqrt{G(r, \varphi)}\, d\varphi \equiv 0; \qquad \lim_{r=0} \int_0^{\varphi} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\, d\varphi \equiv \varphi,$$

d. h. es muß

$$(\sqrt{G(r,\varphi)})_0 = 0; \qquad \left(\frac{\partial \sqrt{G(r,\varphi)}}{\partial r}\right)_0 = 1 \tag{3}$$

sein. Diese beiden Nebenbedingungen zu (2) hinzugefügt gestatten $G(r, \varphi)$ aus $K(r, \varphi)$ eindeutig zu bestimmen.

Für $K =$ konst. läßt sich die Lösung von (2) sofort hinschreiben. In diesem Falle ist (2) die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung, und es ist, unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen,

$$\underline{\sqrt{G(r,\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}\,r).} \tag{4}$$

Ist $K = K(r, \varphi)$ gegeben, so kann man, da nach (3) $(\sqrt{G})_0$ und $\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\right)_0$ bekannt sind, die folgenden Ableitungen von $\sqrt{G}$ an der Stelle 0 aus (2) der Reihe nach berechnen und für $\sqrt{G}$ die Reihenentwicklung im Nullpunkt angeben. Es ist

$$(\sqrt{G})_0 = 0; \qquad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\right)_0 = 1; \qquad \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}\right)_0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}\right)_0 = -K_0; \qquad \left(\frac{\partial^4 \sqrt{G}}{\partial r^4}\right)_0 = -2\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0, \;\ldots,$$

sodaß

$$\underline{\sqrt{G(r,\varphi)} = r - \frac{K_0}{3!}r^3 - \frac{2}{4!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^4 + \ldots} \tag{5}$$

und

$$\underline{ds^2 = dr^2 + r^2\left(1 - \frac{K_0}{3}r^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right)d\varphi^2.} \tag{6}$$

§ 3.

Die geodätische Krümmung der Kurve $r = r(\varphi)$

bestimmt sich bei bekanntem $G(r, \varphi)$ aus

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{G\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\left(1 + 2\frac{r'^2}{G}\right) - \sqrt{G}\,r'' + r'\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \varphi}}{G^{3/2}\cdot\left(1 + \frac{r'^2}{G}\right)^{3/2}}. \tag{7}$$

Darin bedeutet r' und r'' die erste und zweite Ableitung von r nach φ[2]).

Ersetzt man $\sqrt{G(r,\varphi)}$ durch den gefundenen Ausdruck (5), so bekommt man die geodätische Krümmung der Kurve $r = r(\varphi)$ für die auf die vorliegende Art durch K_0, $\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0$, ... gegebene Fläche.

[2]) Die Formel (7) ist aus der Formel von Bonnet für die geodätische Krümmung einer Flächenkurve (siehe etwa L. Bianchi, Differentialgeometrie 1910, § 76) sofort herzuleiten.

Es ist

$$
(8)\qquad \begin{cases}
\sqrt{G} = r\left(1 - \frac{K_0}{3!} r^2 - \frac{2}{4!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) \\
\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1 - \frac{K_0}{2} r^2 - \frac{2}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots \\
\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \varphi} = - \frac{2}{4!}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^4 + \ldots \\
G = r^2\left(1 - \frac{K_0}{3} r^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) \\
\frac{1}{G} = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{K_0}{3} r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 - \ldots\right) \\
\frac{1}{G^{3/2}} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{K_0}{2} r^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right)
\end{cases}
$$

in (7) eingeführt, wird

$$
(9)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}\Big\{\left(1 - \frac{K_0}{3} r^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right)\left(1 + \frac{2 r'^2}{r^2}\left[1 + \frac{K_0}{3} r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right]\right)
$$
$$
- \frac{r''}{r}\left(1 + \frac{K_0}{3} r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) - \frac{2}{4!}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r' \cdot r + \ldots\Big\}
$$
$$
\cdot\left\{1 + \frac{r'^2}{r^2}\left(1 + \frac{K_0}{3} r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right)\right\}.
$$

§ 4.

Die Entfernungskreise r = konst.

Die geodätische Krümmung der Entfernungskreise ist nach (9):

$$
(10)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{K_0}{3} r^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right\}.
$$

Daraus folgt:

Die Entfernungskreise r = konst. haben nur dann konstante geodätische Krümmung, wenn $\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0$ von φ unabhängig ist. D. h. aber, im Nullpunkt muß K stationär sein. Da nun der Nullpunkt ganz beliebig auf der Fläche gewählt war, so folgt, daß die Krümmung K auf der ganzen Fläche konstant sein muß. Diese Bedingung ist bekanntlich auch hinreichend.

Nur auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes haben die Entfernungskreise konstante geodätische Krümmung, sind also die Entfernungskreise zugleich Krümmungskreise.

Ihre Krümmung ist

$$
(11)\qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{K}\,\mathrm{ctg}\,(\sqrt{K}\, r),
$$

bzw. ihr Radius durch ϱ ausgedrückt:

$$
(12)\qquad r = \frac{1}{\sqrt{K}}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{K}\,\varrho) = \varrho - \frac{K}{3}\varrho^3 + \frac{K^2}{5}\varrho^5 - \ldots
$$

§ 5.

Die Krümmungskreise $\frac{1}{\varrho}$ = konst.

Die Gleichung (7) bzw. (9) stellt die Differentialgleichung der Krümmungskreise $1 : \varrho =$ konst. dar. Es handelt sich darum, diese Differentialgleichung für eine beliebige Fläche, d. h. ein beliebiges $K(r, \varphi)$ zu lösen.

Im Unendlich-Kleinen ist jede krumme Fläche als eben anzusehen, d. h. im Unendlich-Kleinen fallen auf jeder Fläche die Krümmungskreise mit den Entfernungskreisen zusammen, die ihrerseits in ebene Kreise übergehen. Jede Schar von Krümmungskreisen endet also bei Unendlich-Kleinwerden ihres Parameters ϱ in einer Schar von ebenen Entfernungskreisen. Es gibt somit eine Schar von Krümmungskreisen, die die unendlich kleinen konzentrischen Kreise um den Nullpunkt in sich enthält. Diese Schar hat die Gleichung

$$r = \varrho + b(\varphi)\varrho^2 + c(\varphi)\varrho^3 + d(\varphi)\varrho^4 + \dots, \tag{13}$$

worin $b(\varphi)$, $c(\varphi)$, $d(\varphi)$, ... noch unbekannte Funktionen von φ sind. Es handelt sich für uns darum, diese Funktionen zu bestimmen und festzustellen, wie die Fläche, d. h. das $K(r, \varphi)$, beschaffen sein muß, damit sie alle periodisch sind in φ mit der Periode 2π; nur dann sind die durch (13) dargestellten Krümmungskreise nach einem Umlauf geschlossen.

Gehen wir mit (13) in die Differentialgl. (9) hinein, so bekommen wir eine Identität in ϱ, und eine Koeffizientenvergleichung liefert uns die erforderlichen Differentialgleichungen für unsere unbekannten Funktionen $b(\varphi)$, $c(\varphi)$, $d(\varphi)$, ...

Zunächst sei jedoch der kürzere Ansatz: $r = \varrho + b(\varphi)\varrho^2$, $r' = b'(\varphi)\varrho^2$; $r'' = b''(\varphi)\varrho^2$, in (9) eingeführt. Indem wir demgemäß alle höheren als 1. Potenzen von ϱ gegen 0. Potenzen vernachlässigen, erkennen wir sofort, daß alle die Glieder in (9), die von der Krümmung der Fläche herrühren, nicht in Wirkung treten. Es wird einfach

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\{1 - (b + b'')\varrho + \dots\}, \tag{14}$$

d. h. in zweiter Näherung ist die Geometrie der Fläche noch als euklidisch anzusehen, was man übrigens auch direkt aus dem Linienelement (6) hätte entnehmen können.

$b = 0$ ist eine Lösung der aus (14) folgenden Differentialgleichung

$$\text{I. } b'' + b = 0.$$

Wir dürfen also für die Lösung der Differentialgl. (9) den Ansatz machen:

$$\underline{r = \varrho + c(\varphi)\varrho^3 + d(\varphi)\varrho^4 + \ldots} \tag{15}$$

Gehen wir nunmehr mit diesem Ansatz (15) in die Gl. (9) hinein, so wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}(1 - c\varrho^2 - d\varrho^3 - \ldots)\Big\{\Big(1 - \frac{K_0}{3}\varrho^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 \varrho^3 + \ldots\Big)(1 + (\varrho^4) + \ldots)$$
$$- \varrho^3(c'' + d''\varrho + \ldots)(1 - c\varrho^2 - d\varrho^3 - \ldots)\Big(1 + \frac{K_0}{3}\varrho^2 + \frac{1}{3!}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 \varrho^3 + \ldots\Big)$$
$$- (\varrho^4) + \ldots\Big\} \cdot \{1 + (\varrho^4) + \ldots\}$$

$$\underline{\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\Big\{1 - \Big(c + c'' + \frac{K_0}{3}\Big)\varrho^2 - \Big(d + d'' + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0\Big)\varrho^3 - \ldots\Big\}.} \tag{16}$$

Wir bekommen somit für $c(\varphi)$ und $d(\varphi)$ die Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{II. } c'' + c = -\frac{K_0}{3}, \\ \text{III. } d'' + d = -\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0. \end{array}\right. \tag{17}$$

Die Gleichung II hat wie I nur periodische Lösungen in φ von der Periode 2π. Sie sagt aus, daß in 3. Näherung jede Fläche als Fläche konstanter Krümmung angesehen werden kann (vgl. (12)). Die Gleichung III dagegen hat keine periodische Lösung mehr. III ist die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung mit Resonanz. Da nämlich $K(r, \varphi)$ eine Ortsfunktion ist, so hat $\frac{\partial K}{\partial r}$ an jeder Stelle in einer Richtung einen Maximalwert und in jeder zu dieser Richtung unter einem Winkel φ geneigten Richtung den Wert $\left|\frac{\partial K}{\partial r}\right|_{\mathrm{Max}} \cdot \cos\varphi$. Es ist also

$$\text{III. } d'' + d = -\frac{1}{4}\left|\frac{\partial K}{\partial r}\right|_{\mathrm{Max}} \cdot \cos\varphi; \tag{18}$$

ihre Lösung ist:

$$\underline{d = -\frac{1}{8}\left|\frac{\partial K}{\partial r}\right|_{\mathrm{Max}} \cdot \varphi\sin\varphi + A\cos\varphi + B\sin\varphi.} \tag{19}$$

Es muß also, damit III eine periodische Lösung hat, notwendigerweise $\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 = 0$, die Gaußsche Krümmung der Fläche im Nullpunkt also stationär sein. Da der Nullpunkt kein ausgezeichneter Punkt der Fläche war, so folgt, ***daß die Fläche notwendig eine Fläche konstanter Krümmung sein muß, damit die Krümmungskreise sämtlich geschlossen sind.***

Es findet damit eine Behauptung von G. Darboux[3]) ihre Bestätigung.

---

[3]) G. Darboux, Théorie des surfaces, **3** (1894), S. 151.

II. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 6.

Problemstellung.

Wie in der euklidischen Ebene den Kreis, so kann man im euklidischen Raum die Kugel auf zweierlei Art erklären: 1. als geometrischen Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte dieselbe Entfernung haben; 2. als geschlossene Fläche konstanter mittlerer Krümmung, wobei die mittlere Krümmung einer Fläche entweder als arithmetisches Mittel der Hauptkrümmungen oder durch die erste Variation der Oberfläche definiert ist. Wir wollen im folgenden die zweite Art der Definition für die mittlere Krümmung zugrunde legen (Genaueres darüber in § 7).

Gehen wir aus dem Raum mit euklidischer Geometrie in einen Raum, dessen Geometrie durch eine beliebige positiv definite quadratische Form: $ds^2 = \Sigma g_{ik} dx_i dx_k$ gegeben ist, so haben auch hier die Begriffe „Entfernung" und „mittlere Krümmung" ihren guten Sinn, und es liegen die Fragen nahe:

I. Wie muß die Metrik des Raumes beschaffen sein, damit die auf die erste Art als „Entfernungskugeln" definierten Flächen konstante mittlere Krümmung haben?

II. Wie muß die Metrik des Raumes beschaffen sein, damit es in ihm geschlossene Flächen konstanter mittlerer Krümmung gibt, und zwar derart, daß sich diese geschlossenen Flächen konstanter mittlerer Krümmung auf jeden Raumpunkt zusammenziehen lassen?

§ 7.

Die „mittlere Krümmung" einer Fläche

sollte definiert sein durch die erste Variation der Oberfläche dieser Fläche. Genauer: Verschiebt man jeden Punkt eines Oberflächenelementes dO der Fläche um ein kleines Stückchen δn in Richtung der Flächennormalen, so soll die proportionale Änderung der Flächengröße $\frac{\delta dO}{dO}$, dividiert durch $-2\delta n$, als „mittlere Krümmung" der Fläche an der Stelle von dO bezeichnet werden. Wir schreiben

$$(20) \qquad \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = -\frac{1}{2\delta n}\frac{\delta dO}{dO}}.$$

Die Schreibweise, die auf die andere Definition der mittleren Krümmung als arithmetisches Mittel der Hauptkrümmungen deutet, soll ungeachtet dessen beibehalten werden.

Allgemein sei die mittlere Krümmung einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche im n-dimensionalen Raum erklärt durch:

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\ldots+\frac{1}{\varrho_{n-1}}\right)=\frac{-1}{(n-1)\,\delta n}\cdot\frac{\delta dO}{dO}. \tag{21}$$

Diese Definition der mittleren Krümmung ist für jede Riemannsche Metrik brauchbar. Ist die Geometrie des Raumes gegeben durch $ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$, so ist die Geometrie der *Fläche* $x_i = x_i(u, v)$, die sich in diesem Raume befindet, gegeben durch ihr Linienelement

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

worin

$$E = \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u}; \quad F = \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}; \quad G = \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial v} \tag{22}$$

ist, und als ihr Oberflächenelement ergibt sich:

$$dO = (EG - F^2)^{1/2}\,du\,dv. \tag{23}$$

Im Raum von n Dimensionen ist entsprechend das Oberflächenelement dO der $n-1$-dimensionalen Fläche $x_i = x_i(u_1 \ldots u_{n-1})$

$$dO = |\gamma_{\mu\nu}|^{1/2}\cdot du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}, \tag{24}$$

worin $|\gamma_{\mu\nu}|$ die Diskriminante von dem ds^2 der betreffenden Fläche darstellt.

Zur Bestimmung der mittleren Krümmung haben wir noch die Flächennormale nötig. Die Komponenten der Flächennormale von der Länge 1 seien ξ_1, ξ_2, ξ_3. Dann gilt:

$$\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\xi_k = 0; \quad \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\xi_k = 0; \quad \sum g_{ik}\xi_i\xi_k = 1. \tag{25}$$

Daraus sind die ξ_i zu berechnen.

Variieren wir nunmehr die Fläche in der vorgeschriebenen Weise, indem wir setzen:

$$x_i^* = x_i(u, v) + \delta n\, \xi_i,$$

so wird

$$\begin{aligned}
E^* &= \sum g_{ik}^*\frac{\partial x_i^*}{\partial u}\frac{\partial x_k^*}{\partial u} = \sum (g_{ik} + \delta g_{ik})\frac{\partial x_i^*}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_k^*}{\partial u} \\
&= \sum\left(g_{ik} + \delta n \sum \xi_l \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} + \delta n\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial u} + \delta n\frac{\partial \xi_k}{\partial u}\right) \\
&= E + 2\,\delta n\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_k}{\partial u} + \delta n\sum \delta g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u} + \delta n\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\xi_k
\end{aligned}$$

$$E^* = E + \delta n\left(2\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_k}{\partial u} + \sum \delta g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right).$$

In gleicher Weise findet man die variierten Ausdrücke F^* und G^* von F und G. Man bekommt:

$$(26)\qquad \begin{cases} E^* = E - \delta n \cdot E' = \underline{E - \delta n (2L + \bar{E})}, \\ F^* = F - \delta n \cdot F' = \underline{F - \delta n (2M + \bar{F})}, \\ G^* = G - \delta n \cdot G' = \underline{G - \delta n (2N + \bar{G})}. \end{cases}$$

Darin bedeuten:

$$(27)\qquad \begin{cases} \underline{L = -\sum g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_k}{\partial u};} & \underline{\bar{E} = -\sum \delta g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u};} \\ \underline{M = -\frac{1}{2}\sum g_{ik}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_k}{\partial v} + \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}\right);} & \underline{\bar{F} = -\sum \delta g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v};} \\ \underline{N = -\sum g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \xi_k}{\partial v};} & \underline{\bar{G} = -\sum \delta g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial v};} \\ \underline{\delta g_{ik} = -\sum \xi_i \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}.} \end{cases}$$

Es wird somit

$$\begin{aligned} dO^* &= (E^* G^* - F^{*2})^{1/2}\, du\, dv \\ &= dO - \frac{\delta n}{2}\{E(2N + \bar{G}) + G(2L + \bar{E}) - 2F(2M + \bar{F})\}\, du\, dv \end{aligned}$$

und demnach die mittlere Krümmung $-\frac{1}{2\delta n}\frac{\delta dO}{dO}$ $(\delta n \to 0)$

$$(28)\qquad \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{E(2N+\bar{G}) + G(2L+\bar{E}) - 2F(2M+\bar{F})}{EG - F^2}}.$$

Die mittlere Krümmung der $(n-1)$*-dimensionalen Fläche* $x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ *im Raum von n Dimensionen* berechnet sich ganz entsprechend.

Bezeichnet man die Matrix des Linienelementes der Fläche mit $|\gamma_{\mu\nu}|$, so daß

$$(26\,\text{a})\qquad \gamma_{\mu\nu} = \sum g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}\frac{\partial x_k}{\partial u_\nu}$$

ist, bezeichnet man ferner die zum Element $\gamma_{\mu\nu}$ gehörige Unterdeterminante der Matrix $|\gamma_{\mu\nu}|$ mit $\Gamma_{\mu\nu}$, und setzt man schließlich noch entsprechend den früheren Bezeichnungen

$$-\gamma'_{\mu\nu} \equiv 2\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_\nu} + \sum \delta g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}\frac{\partial x_k}{\partial u_\nu},$$

so wird die mittlere Krümmung der Fläche $x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$

$$(28\,\text{a})\qquad \underline{\frac{1}{(n-1)}\left\{\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \cdots + \frac{1}{\varrho_{n-1}}\right\} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot \sum \gamma'_{\mu\nu}\cdot\frac{\Gamma_{\mu\nu}}{|\gamma_{\mu\nu}|}}.$$

§ 8.
Koordinaten.

Es sollen zweierlei Koordinaten nebeneinander benutzt werden, die Riemannschen Normalkoordinaten und geodätische Polarkoordinaten; diese zur Durchführung der Rechnung, jene zur Deutung der Resultate.

Riemannsche Normalkoordinaten. Das die Metrik unseres Raumes bestimmende Linienelement $ds^2 = \Sigma g_{ik} dx_i dx_k$; $ds^2 > 0$ läßt sich immer so transformieren, daß es für irgendeinen herausgegriffenen Punkt O des Raumes die Form hat: $ds^2 = \Sigma dx_i^2$. Wir haben dann im Punkte O ein orthogonales Dreibein festgelegt. Wir können nun, bezogen auf dieses orthogonale Dreibein (bzw. n-Bein), jeden Punkt des Raumes durch seine Polarkoordinaten benennen, durch seine geodätische Entfernung r von O und durch die Richtung, in der der Punkt von O aus gesehen wird. Die Riemannschen Normalkoordinaten sind dann erklärt durch

$$y_i = r\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0.$$

Die $\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0$ sind die Richtungskosinus im Nullpunkt,

$$\sum y_i^2 = r^2.$$

In diesen Koordinaten hat das Linienelement des Raumes die Form:

$$\underline{ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum\sum \mathfrak{P}_{ik,rs}\, p_{ik}\, p_{rs}.} \tag{29}$$

Darin bedeuten: $p_{ik} \equiv y_i dy_k - y_k dy_i$, und die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ sind Potenzreihen in den y_i, die die einzige Bedingung erfüllen müssen, daß sie für kleine y_i konvergieren.

$$\underline{\mathfrak{P}_{ik,rs} \equiv \alpha_{ik,rs} + \beta^{(1)}_{ik,rs} y_1 + \beta^{(2)}_{ik,rs} y_2 + \beta^{(3)}_{ik,rs} y_3 + \cdots} \tag{30}$$

$$\mathfrak{P}_{ik,rs} = \mathfrak{P}_{rs,ik} = \mathfrak{P}_{ki,sr} = \mathfrak{P}_{sr,ki}; \qquad \mathfrak{P}_{ik,rs} = -\mathfrak{P}_{ki,rs} = -\mathfrak{P}_{ik,sr}.$$

Durch die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ ist die Metrik des Raumes eindeutig festgelegt, umgekehrt sind aber die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ durch die Metrik des Raumes noch nicht völlig bestimmt. Wegen der Identität $\sum\limits_{ik \neq rs} p_{ir}\, p_{rs} \equiv 0$ und $y_i p_{kr} + y_r p_{ik} + y_k p_{ri} \equiv 0$ ist das erst der Fall, wenn man noch *Normierungsgleichungen* für die Koeffizienten der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ hinzufügt. Die am nächsten liegenden Normierungen, die ihren Zweck vollständig erfüllen, lauten:

$$\text{(31)}\quad 1.\ \mathfrak{P}_{ik,rs} + \mathfrak{P}_{ir,sk} + \mathfrak{P}_{is,kr} = 0; \quad 2.\ \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,rs}}{\partial y_t} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,tr}}{\partial y_s} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ir,st}}{\partial y_r} = 0\ ^{4)}.$$

---

[4]) Vgl. H. Vermeil, Math. Annalen 79 (1917), S. 289.

Für den Raum von 3 Dimensionen kommen nur die 2. Normierungsgleichungen zur Geltung. Sie bedeuten für die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$:

$$(32) \qquad \underline{\beta^{(1)}_{ik,23} + \beta^{(2)}_{ik,31} + \beta^{(3)}_{ik,12} = 0}$$

für $ik = 23, 31, 12$.

Die geometrische Bedeutung der $\alpha_{ik,rs}$ und $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ in den Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ läßt sich leicht erkennen. Setzt man alle y außer y_i und y_k gleich null, so wird das Linienelement der durch die Buchstaben i und k charakterisierten geodätischen Fläche für die Umgebung des Nullpunktes

$$ds^2 = dy_i^2 + dy_k^2 + \alpha_{ik,ik} \cdot p_{ik}^2$$

oder in Polarkoordinaten:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(1 + \alpha_{ik,ik} r^2) d\varphi^2.$$

Ein Vergleich mit (6) zeigt, daß die $\alpha_{ik,ik}$ bis auf einen Proportionalitätsfaktor nichts anderes sind als die Gaußschen Krümmungen der geodätischen Flächen ik im Nullpunkt. Es ist $\alpha_{ik,ik} = -\frac{1}{3}(K_{ik})_0$.

(33) Die Gesamtheit der $\alpha_{ik,rs}$ stellt den *Krümmungstensor des Raumes im Nullpunkt* dar.

(34) Die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ sind — das läßt sich ebenso leicht einsehen — die *Ableitungen der Tensorkomponenten nach y_t im Nullpunkt* (wiederum nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor).

Die höheren Koeffizienten in den Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ hängen ebenfalls in bestimmter, einfacher Weise mit den Ableitungen der Tensorkomponenten im Nullpunkt zusammen[5]).

Durch einmaliges Verjüngen des Krümmungstensors bekommt man die *Richtungsinvariante der Krümmung*, z. B.

bei 3 Dimensionen für die y_1-Richtung: $\alpha_{12,12} + \alpha_{13,13}$,

„ 4 „ „ „ „ $\alpha_{12,12} + \alpha_{13,13} + \alpha_{14,14}$,

durch zweimaliges Verjüngen die *Ortsinvariante der Krümmung*, die *skalare Krümmung* $\Sigma \alpha_{ik,ik}$ (auch die „*Gaußsche Krümmung*" des Raumes genannt).

Die *skalare Krümmung* eines Raumes ist also (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) das arithmetische Mittel der Gaußschen Krümmungen der $\frac{n(n-1)}{2}$ zweidimensionalen geodätischen Flächen, die sich in das orthogonale n-bein des betr. Raumpunktes einspannen lassen, und die *Richtungsinvariante der Krümmung* ist das arithmetische Mittel der Gaußschen

[5]) Vgl. H. Vermeil, l. c.

Krümmungen der $n-1$ zueinander orthogonalen geodätischen Flächen, die die betreffende Richtung enthalten.

Die Richtungsinvariante der Krümmung läßt sich durch ein Ellipsoid veranschaulichen, daß „*Krümmungsellipsoid*" genannt werde:

$$R_{ik}\eta_i\eta_k = 1, \quad \text{wobei im Nullpunkt } R_{ik} = \sum_r \alpha_{ir,kr}.$$

Als Richtungsinvariante der Krümmung läßt sich auch die Differenz aus Ortsinvariante und der obigen Richtungsinvariante, für die y_r-Richtung im Nullpunkt also $\sum_{ik}\alpha_{ik,ik} - \sum_k \alpha_{rk,rk}$, verwenden. Die so definierte Richtungsinvariante ist dann die skalare Krümmung des zu der betreffenden Richtung (y_r) orthogonalen Unterraumes in dem betreffenden Punkt.

Ein Raum von 3 Dimensionen ist ein „*Raum konstanter Krümmung*", wenn die skalare Krümmung sich von Ort zu Ort nicht ändert, und wenn obendrein die Richtungsinvariante der Krümmung einen von der Richtung unabhängigen Wert hat, oder anschaulich ausgedrückt, wenn das Krümmungsellipsoid überall eine Kugel ist. In diesem Falle sind die $\alpha_{ik,ik}$ alle einander gleich und die $\alpha_{ik,rs} = 0$ $(ik \neq rs)$. Es mag noch bemerkt werden, daß aus der zweiten Eigenschaft die erste folgt. Hat in jedem Punkt des Raumes die Richtungsinvariante einen von der Richtung unabhängigen Wert, so ändert sich auch die skalare Krümmung von Ort zu Ort nicht[*]).

Hat ein Raum mehr als 3 Dimensionen, so ist seine Metrik durch das Krümmungsellipsoid noch keineswegs gekennzeichnet, wie das bei nur 3 Dimensionen der Fall ist. Ein R_n ist erst dann ein „Raum konstanter Krümmung", wenn in sämtlichen dreidimensionalen Unterräumen das Krümmungsellipsoid eine Kugel ist.

Zwischen „kovarianten" und „kontravarianten" Vektor- und Tensorkomponenten ist in der Schreibweise aus Bequemlichkeitsgründen nicht unterschieden worden. Es hätten sonst bei den η_i wie bei den y_i und den p_{ik} die Indizes oben, bei den $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ aber sämtlich unten stehen müssen.

Polarkoordinaten. Wir wollen nunmehr dazu übergehen, das Linienelement der Riemannschen Normalkoordinaten in Polarkoordinaten umzusetzen. Es sei

$$\begin{aligned} y_1 &= r\cos\varphi, \\ y_2 &= r\sin\varphi\cos\psi, \\ y_3 &= r\sin\varphi\sin\psi, \end{aligned}$$

oder im Raum von n Dimensionen:

---

*) F. Schur, Math. Ann. 27, S. 563. — G. Herglotz, Leipz. Ber. 1916, S. 203.

$$
(35)\qquad \begin{cases}
y_1 = r\cos\varphi_1 \\
y_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
y_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\
\vdots \\
y_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}. \\
y_n \;\;= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.
\end{cases}
$$

Es ist dann $\Sigma y_i^2 = r^2$, und es wird

$$
\begin{aligned}
(36)\quad ds^2 = dr^2 &+ r^2 d\varphi_1^2 + r^2 \sin\varphi_1^2 d\varphi_2^2 + \ldots + r^2\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\ldots\sin\varphi_{n-2}^2 d\varphi_{n-1}^2 \\
&+ r^4\{P_{11}d\varphi_1^2 + P_{22}\sin\varphi_1^2 d\varphi_2^2 + \ldots + P_{n-1,\,n-1}\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\ldots\sin\varphi_{n-2}^2 d\varphi_{n-1}^2 \\
&+ P_{12}\sin\varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2 + P_{13}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_3 + \ldots \\
&+ P_{n-2,\,n-1}\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\ldots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}d\varphi_{n-1}\}.
\end{aligned}
$$

Darin sind die P_{ik} Potenzreihen in r, deren Koeffizienten gewisse, noch zu bestimmende Funktionen der $\alpha_{ik,\,rs}$, $\beta_{ik,\,rs}$, … und der φ_i sind,

$$
(37)\qquad P_{ik} = A_{ik} + B_{ik}r + C_{ik}r^2 + \ldots .
$$

Es handelt sich jetzt darum, die A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, … auszurechnen. Transformiert man die $p_{ik} = y_i dy_k - y_k dy_i$, so findet man

$$
\begin{aligned}
(38)\quad p_{ik} = r^2\{&(s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot c_1 s_2 s_3\ldots s_{k-1}c_k - s_1 s_2\ldots s_{k-1}c_k\cdot c_1 s_2 s_3\ldots s_{i-1}c_i)d\varphi_1 \\
&+ (s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 c_2 s_3\ldots s_{k-1}c_k - s_1 s_2\ldots s_{k-1}c_k\cdot s_1 c_2 s_3\ldots s_{i-1}c_i)d\varphi_2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 s_2\ldots c_i s_{i+1}\ldots s_{k-1}c_k + s_1 s_2\ldots s_{k-1}c_k\cdot s_1 s_2\ldots s_i - s_i)d\varphi_i \\
&+ s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 s_2 s_i c_{i+1}s_{i+2}\ldots s_{k-1}c_k d\varphi_{i+1} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 s_2\ldots s_{k-1}s_k d\varphi_k\}.
\end{aligned}
$$

s_i und c_i ist der bequemeren Schreibweise halber gesetzt für $\sin\varphi_i$ und $\cos\varphi_i$. Diese Bezeichnungsweise soll im folgenden immer gelten. Zu dem Bildungsgesetz der p_{ik} ist noch zu bemerken, daß die hervorstechenden c_i bzw. s_i (die sich von ihrer Umgebung unterscheiden) bei etwa eintretender Konkurrenz mit ihren Nachbarn (wenn z. B. $i = 1$ oder $k = 2$ ist) die stärkeren sind, und daß $c_n = 1$ und $s_n = 0$ zu setzen ist.

Für den Raum von 3 und 4 Dimensionen bekommt man für die p_{ik} die durch die Tabellen (39) und (40) wiedergegebenen Ausdrücke.

(39)

	$r^2 d\varphi$	$r^2 s_1 d\psi$
p_{23}		s_1
p_{31}	$-s_2$	$-c_1 c_2$
p_{12}	c_2	$-c_1 s_2$

(40)

	$r^2\,d\varphi_1$	$r^2 s_1\,d\varphi_2$	$r^2 s_1 s_2\,d\varphi_3$
p_{12}	c_2	$-c_1 s_2$	
p_{13}	$s_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3$	$c_1 s_3$
p_{14}	$s_2 s_3$	$c_1 c_2 s_3$	$s_1 c_3$
p_{23}		$s_1 \cdot c_3$	$-s_1 c_2 s_3$
p_{24}		$s_1 \cdot s_3$	$s_1 c_2 c_3$
p_{34}			$s_1 s_2$

Daraus kann man nun sofort die A_{ik}, B_{ik}, ... entnehmen. Vergegenwärtigt man sich die Definition der A_{ik}, B_{ik}, ... durch einen Blick auf (29), (30), (36) und (37), so liefert die Tabelle (39) z. B. für den Raum von 3 Dimensionen:

$$
(41)\quad \begin{cases}
A_{11} = \alpha_{12,12}\, c_2^2 + \alpha_{31,31}\, s_2^2 - 2\alpha_{12,31}\, s_2 c_2, \\
A_{22} = \alpha_{12,12}\, c_1^2 s_2^2 + \alpha_{31,31}\, c_1^2 c_2^2 + \alpha_{23,23}\, s_1^2 - 2\alpha_{23,31}\, s_1 c_1 c_2 \\
\qquad\qquad - 2\alpha_{23,12}\, s_1 c_1 s_2 + 2\alpha_{12,31}\, c_1^2 s_2 c_2, \\
A_{12} = 2 c_1 s_2 c_2 (\alpha_{31,31} - \alpha_{12,12}) + \alpha_{12,31}\, c_1 (s_2^2 - c_2^2) \\
\qquad\qquad - \alpha_{23,31}\, s_1 s_2 + \alpha_{23,12}\, s_1 c_2 .
\end{cases}
$$

Für den Raum konstanter Krümmung ($\alpha_{ik,ik} = \alpha$; $\underset{ik \neq rs}{\alpha_{ik,rs}} = 0$) wird $A_{11} = A_{22} = \alpha$; $A_{12} = 0$.

Für den Raum von 4 und mehr Dimensionen ergeben sich ähnliche Ausdrücke für die A_{ik}, die indessen für die weiteren Betrachtungen nicht erforderlich sind. Was wir von ihnen wissen müssen, werden wir ohne Schwierigkeit aus den Tabellen für die p_{ik} entnehmen können.

Die B_{ik} gehen aus den A_{ik} hervor, wie man erkennt, wenn man (30) und (37) beachtet, *indem man in den* A_{ik} *die* $\alpha_{ik,rs}$ *ersetzt durch*

$$
(42)\qquad \beta^{(1)}_{ik,rs} \cos\varphi + \beta^{(2)}_{ik,rs} \sin\varphi \cos\psi + \beta^{(3)}_{ik,rs} \sin\varphi \sin\psi .
$$

Entsprechend die C_{ik} und höheren Koeffizienten der Potenzreihen P_{ik}.

Für den Raum mit der konstanten Krümmung K ist:

$$
\alpha_{ik,ik} = \alpha = -\frac{K}{3};\quad \underset{ik \neq rs}{\alpha_{ik,rs}} = 0 \quad \text{und} \quad \beta^{(i)}_{ik,rs} = 0
$$

$$
P_{ii} = \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}\, r; \qquad P_{ik} = 0,\ (i \neq k) \qquad \text{(vgl. (4))}.
$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zu unseren Problemen zurückkehren.

§ 9.

Die Flächen $r = \text{konst.}$

Das Linienelement der Entfernungskugeln $r = \text{konst.}$ ist nach (36)

$$\begin{aligned} ds^2 = r^2 \{ & (1 + P_{11} r^2) d\varphi_1^2 + (1 + P_{22} r^2) s_1^2 d\varphi_2^2 \\ & + \ldots + (1 + P_{n-1,n-1} r^2) s_1^2 s_2^2 \ldots s_{n-2}^2 d\varphi_{n-1}^2 + r^2 P_{12} s_1 d\varphi_1 d\varphi_2 \\ & + \ldots + r^2 P_{n-2,n-1} \cdot s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-3}^2 s_{n-2} d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} \}, \end{aligned}$$

somit die Matrix des Linienelementes ($P_{ik} = A_{ik} + B_{ik} r + \ldots$):

$$(43) \quad |\gamma_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} r^2(1 + A_{11} r^2 + B_{11} r^3 + \ldots); & s_1 A_{12} r^4 + \ldots; & \ldots\ldots \\ s_1 A_{12} r^4 + \ldots; & r^2(1 + A_{22} r^2 + B_{22} r^3 + \ldots) \cdot s_1^2; & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots; & r^2(1 + A_{n-1,n-1} r^2 + B_{n-1,n-1} r^3 + \ldots) s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-2}^2 & \end{vmatrix}.$$

Da für die Flächen $r = \text{konst.}$ $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; $\delta n = -\delta r$ ist, wenn wir die Normale nach innen nehmen, so wird

$$(44) \quad |\gamma'_{\mu\nu}| = |-\delta g_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} 2r(1 + 2A_{11} r^2 + \tfrac{5}{2} B_{11} r^3 + \ldots); & 4 s_1 A_{12} r^3 + \ldots; & \ldots\ldots \\ 4 s_1 A_{12} r^3 + \ldots; & 2r(1 + 2A_{22} r^2 + \tfrac{5}{2} B_{22} r^3 + \ldots) s_1^2; & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots; & 2r(1 + 2A_{n-1,n-1} r^2 + \tfrac{5}{2} B_{n-1,n-1} r^3 + \ldots) s_1^2 \ldots s_{n-2}^2 & \end{vmatrix}$$

und damit nach (28a) die *mittlere Krümmung der Entfernungskugeln*

$$(45) \quad \underline{\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_{n-1}}\right) = \frac{1}{r}\left\{1 + r^2 \frac{\sum A_{\mu\mu}}{n-1} + \ldots\right\}}.$$

Die Frage war: Unter welchen Voraussetzungen hat die mittlere Krümmung dieser Kugeln überall denselben Wert?

Die Antwort ist nach (45): Es muß $\Sigma A_{\mu\mu}$ einen vom Ort unabhängigen, konstanten Wert haben. Was das für die $\alpha_{ik,rs}$ bedeutet, ist sofort zu erkennen, wenn man $\Sigma A_{\mu\mu}$ bildet.

Wie man für 3 Dimensionen aus (41), für 4 Dimensionen aus der Tabelle (40) und allgemein aus den p_{ik} (38) ablesen kann, ist

$$(46) \quad \begin{aligned} \underline{\sum A_{\mu\mu}} &= \sum_{ik} \alpha_{ik,ik}(y_i^2 + y_k^2) + 2 \sum_{i,k} \left(\sum_r \alpha_{ir,kr}\right) y_i y_k \\ &= \underline{\sum_i \left(\sum_r \alpha_{ir,ir}\right) y_i^2 + 2 \sum_{i,k} \left(\sum_r \alpha_{ir,kr}\right) y_i y_k} \end{aligned}$$

$$(\text{bei } \Sigma y_i^2 = 1).$$

Man sieht: Damit $\Sigma A_{\mu\mu}$ auf der ganzen Einheitskugel denselben Wert hat, muß notwendig $\sum\limits_r \alpha_{ir,ir}$ von i unabhängig und $\sum\limits_r \alpha_{ir,kr} = 0$ sein, d. h. die Richtungsinvariante der Krümmung muß im Nullpunkt einen von

der Richtung unabhängigen Wert haben. Da der Nullpunkt ein beliebiger Raumpunkt war, so gilt das für jeden Punkt des Raumes, und nach dem früher erwähnten Satz von F. Schur und Herglotz (S. 298) folgt daraus, daß dann auch die Ortsinvariante der Krümmung (die „Gaußsche Krümmung" des Raumes) sich von Ort zu Ort nicht ändert. Ein Raum von 3 Dimensionen muß also ein *„Raum konstanter Krümmung"* sein.

Die mittlere Krümmung dieser Kugeln im Raum konstanter Krümmung ist, wie man erkennt, wenn man $P_{ii} = \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}\, r$, $P_{\substack{ik \\ i \neq k}} = 0$, setzt:

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_{n-1}}\right) = \sqrt{K} \operatorname{ctg}(\sqrt{K}\, r)$$

§ 10.

Die Flächen $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = $ konst. im R_3.

Die Differentialgleichung dieser Flächen im Raum mit dem Linienelement $ds^2 = \Sigma g_{ik} dx_i dx_k$ haben wir bereits früher aufgestellt. Es ist die Gleichung (28), wenn wir in ihr $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \text{konst.} = \frac{1}{\varrho}$ setzen.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{4} \frac{E(2N+\bar{G}) + G(2L+\bar{E}) - 2F(2M+\bar{F})}{EG-F^2}. \tag{47}$$

Die Bedeutung von E, F, G, L, M, N, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ zeigen die Formeln (22) und (27).

Ist das Linienelement gemäß (36) und (37) in Polarkoordinaten gegeben:

$$ds^2 = dr^2 + G_{11} d\varphi^2 + G_{22} d\psi^2 + 2 G_{12} d\varphi d\psi,$$

worin

$$\begin{cases} G_{11} \equiv r^2(1 + A_{11} r^2 + B_{11} r^3 + C_{11} r^4 + \ldots), \\ G_{22} \equiv s_1^2 r^2 (1 + A_{22} r^2 + B_{22} r^3 + C_{22} r^4 + \ldots), \\ G_{12} \equiv s_1 \cdot r^4 (A_{12} + B_{12} r + C_{12} r^2 + \ldots), \end{cases} \tag{48}$$

so können wir für jede Fläche $r = r(\varphi, \psi)$ die E, F, G; L, M, N; $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ berechnen. Wir haben dann auf der rechten Seite von (47) eine Funktion von $r_{\varphi\varphi}, r_{\varphi\psi}, r_{\psi\psi}, r_\varphi, r_\psi, r$ und φ und damit die Differentialgleichung für die Flächen konstanter mittlerer Krümmung in der gewünschten Form.

Wir verfahren dann weiter so, wie wir es früher bei der Behandlung des analogen Problems für krumme Flächen taten. Wir bedenken, daß im Unendlich-Kleinen der Raum als eben, seine Geometrie als euklidisch, angesehen werden kann und machen für die Differentialgleichung den Lösungsansatz:

$$r = \varrho + b(\varphi, \psi)\varrho^2 + c(\varphi, \psi)\varrho^3 + \ldots.$$

Indem wir gleich noch einen Schritt weitergehen und berücksichtigen, daß auch in zweiter Näherung der Raum noch als eben anzusehen ist, was in genau der gleichen Weise folgt wie damals, setzen wir

$$\underline{r = \varrho + c(\varphi,\psi)\varrho^3 + d(\varphi,\psi)\varrho^4 + e(\varphi,\psi)\varrho^5 + \ldots} \tag{49}$$

Mit diesem Ansatz gehen wir dann in die Differentialgleichung hinein. Wir bekommen dann eine Identität in ϱ, und es liefert uns eine Koeffizientenvergleichung die für die unbekannten Funktionen $c(\varphi,\psi)$, $d(\varphi,\psi)$, $e(\varphi,\psi)$, … erforderlichen Differentialgleichungen.

Falls es geschlossene Flächen mittlerer Krümmung gibt, die den Nullpunkt in der verlangten Weise umschließen, so müssen die Differentialgleichungen für alle Koeffizienten $c(\varphi,\psi)$, $d(\varphi,\psi)$, $e(\varphi,\psi)$, … Lösungen haben, die auf der ganzen Einheitskugel stetig sind. Wir werden erkennen, daß dazu notwendig ist, daß der Raum konstante skalare Krümmung hat.

Verfahren wir nunmehr in der angegebenen Weise!

$$r = \varrho(1 + c\varrho^2 + d\varrho^3 + \ldots); \quad r_\varphi = \varrho^3(c_\varphi + d_\varphi\varrho + \ldots),$$
$$r_\psi = \varrho^3(c_\psi + d_\psi\varrho + \ldots),$$
$$\begin{aligned} G_{11} &\equiv r^2(1 + A_{11}r^2 + B_{11}r^3 + \ldots) \\ &= \varrho^2\cdot\{1 + (2c + A_{11})\varrho^2 + (2d + B_{11})\varrho^3 + \ldots\}, \\ G_{22} &\equiv s_1^2 r^2(1 + A_{22}r^2 + B_{22}r^3 + \ldots) \\ &= \varrho^2\cdot s_1^2\cdot\{1 + (2c + A_{22})\varrho^2 + (2d + B_{22})\varrho^3 + \ldots\}, \\ G_{12} &= s_1\cdot\varrho^4\cdot\{A_{12} + B_{12}\varrho + \ldots\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underline{D \equiv G_{11}\cdot G_{22} - G_{12}^2} \\ &= s_1^2\cdot\varrho^4\cdot\{1 + (4c + A_{11} + A_{22})\varrho^2 + (4d + B_{11} + B_{22})\varrho^3 + \ldots, \\ &E \equiv \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u} = r_\varphi^2 + G_{11} = \varrho^2\{1 + (2c + A_{11})\varrho^2 + (2d + B_{11})\varrho^3 + \ldots\}, \\ &G \equiv \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial v} = r_\psi^2 + G_{22} = s_1^2\varrho^2\{1 + (2c + A_{22})\varrho^2 + (2d + B_{22})\varrho^3 + \ldots\}, \\ &F \equiv \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} = r_\varphi r_\psi + G_{12} = s_1\cdot\varrho^4\{A_{12} + \ldots\}, \\ &\underline{EG - F^2} = s_1^2\cdot\varrho^4\cdot\{1 + (4c + A_{11} + A_{22})\varrho^2 + (4d + B_{11} + B_{22})\varrho^3 + \ldots\}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der L, M, N; $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ haben wir zunächst die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 der Flächennormalen aus den Gleichungen (25) zu berechnen. Für unser Linienelement lauten die Gleichungen (25):

$$\left\{\begin{aligned} &r_\varphi\cdot\xi_1 + G_{11}\xi_2 + G_{12}\xi_3 = 0, \\ &r_\psi\cdot\xi_1 + G_{12}\xi_2 + G_{22}\xi_3 = 0, \\ &\xi_1^2 + G_1\xi_2^2 + 2G_{12}\xi_2\xi_3 + G_{22}\xi_3^2 = 1, \end{aligned}\right. \tag{50}$$

daraus

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{1}{D}(G_{12} r_\psi - G_{22} r_\varphi),$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{1}{D}(G_{12} r_\varphi - G_{11} r_\psi),$$

$$\frac{1}{\xi_1^2} = 1 + \frac{1}{D}(G_{11} r_\psi^2 - 2 G_{12} r_\varphi r_\psi + G_{22} r_\varphi^2) = \frac{EG - F^2}{D},$$

somit:

$$\xi_1 = -1 + \frac{1}{2}\left(c_\varphi^2 + \frac{1}{s_1^2} c_\psi^2\right) \varrho^4 + \dots .$$

$$\xi_2 = \varrho \{c_\varphi + d_\varphi \varrho + \dots\}.$$

$$\xi_3 = \frac{\varrho}{s_1^2}\{c_\psi + d_\psi \varrho + \dots\}.$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} = (\varrho^7); \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} = (\varrho^7).$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} = \varrho \{c_{\varphi\varphi} + d_{\varphi\varphi} \varrho + \dots\},$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} = \varrho \{c_{\varphi\psi} + d_{\varphi\psi} \varrho + \dots\},$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} = \frac{\varrho}{s_1^2}\left\{\left(c_{\varphi\psi} - \frac{2 c_1}{s_1} c_\psi\right) + \left(d_{\varphi\psi} - \frac{2 c_1}{s_1} d_\psi\right) \varrho + \dots\right\},$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \psi} = \frac{\varrho}{s_1^2}\{c_{\psi\psi} + d_{\psi\psi} \varrho + \dots\}.$$

Zur Berechnung der $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ haben wir noch die Ableitungen der G_{ik} nötig. Es ist

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial r} = 2r + 4 A_{11} r^3 + 5 B_{11} r^4 + \dots$$
$$= 2\varrho\left\{1 + (c + 2A_{11})\varrho^2 + \left(d + \frac{5}{2} B_{11}\right)\varrho^3 + \dots\right\},$$

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial \varphi} = \varrho^4 \{(2 c_\varphi + A_{11\varphi}) + (2 d_\varphi + B_{11\varphi})\varrho + \dots\},$$

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial \psi} = \varrho^4 \{(2 c_\psi + A_{11\psi}) + (2 d_\psi + B_{11\psi})\varrho + \dots\},$$

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial r} = 2 s_1^2 \cdot \varrho\left\{1 + (c + 2A_{22})\varrho^2 + \left(d + \frac{5}{2} B_{22}\right)\varrho^3 + \dots\right\},$$

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial \varphi} = 2 s_1^2 \cdot \varrho^2 \left\{\frac{c_1}{s_1} + \left(\frac{c_1}{s_1}(2c + A_{22}) + c_\varphi + \frac{1}{2} A_{22\varphi}\right)\varrho^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{s_1}{c_1}(2d + B_{22}) + d_\varphi + \frac{1}{2} B_{22\varphi}\right)\varrho^3 + \dots\right\},$$

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial \psi} = \varrho^4 \cdot s_1^2 \cdot \{(2 c_\psi + A_{22\psi}) + (2 d_\psi + B_{22\psi})\varrho^2 + \dots\},$$

somit (vgl. (27)):

$$\bar{E} = -\delta G_{11} \equiv -\left(\frac{\partial G_{11}}{\partial r}\xi_1 + \frac{\partial G_{11}}{\partial \varphi}\xi_2 + \frac{\partial G_{11}}{\partial \psi}\xi_3\right)$$
$$= 2\varrho\left\{1 + (c + 2A_{11})\varrho^2 + \left(d + \frac{5}{2}B_{11}\right)\varrho^3 + \ldots\right\},$$
$$\bar{G} = -\delta G_{22} = 2\varrho s_1^2\left\{1 + \left(c - \frac{c_1}{s_1}c_\varphi + 2A_{22}\right)\varrho^2 + \left(d - \frac{c_1}{s_1}d_\varphi + \frac{5}{2}B_{22}\right)\varrho^3 + \ldots\right\},$$
$$\bar{F} = -\delta G_{12} = 4\varrho^3 s_1 A_{12} + \ldots.$$

Ferner wird:

$$L \equiv -\left(r_\varphi \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + G_{11}\frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} + G_{12}\frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi}\right)$$
$$= -\varrho^3\{c_{\varphi\varphi} + d_{\varphi\varphi}\varrho + \ldots\},$$
$$N = -\varrho^3\{c_{\psi\psi} + d_{\psi\psi}\varrho + \ldots\},$$
$$M = -\varrho^3\{c_{\varphi\psi} + d_{\varphi\psi}\varrho + \ldots\}.$$

Setzen wir nunmehr die für E, F, G, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, L, M, N gefundenen Ausdrücke in unsere Differentialgleichung (48) ein, so geht sie über in die Identität:

$$(51) \qquad \frac{1}{\varrho} \equiv \frac{1}{\varrho}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(2c + \frac{c_1}{s_1}c_\varphi + c_{\varphi\varphi} + \frac{1}{s_1^2}c_{\psi\psi} - (A_{11} + A_{22})\right)\varrho^2\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(2d + \frac{c_1}{s_1}d_\varphi + d_{\varphi\varphi} + \frac{1}{s_1^2}d_{\psi\psi} - \frac{3}{2}(B_{11} + B_{22})\right)\varrho^3 + (\varrho^4) + \ldots\right\}.$$

Daraus folgen nun sofort die für $c(\varphi, \psi)$ und $d(\varphi, \psi)$ gesuchten Differentialgleichungen. Damit die Identität erfüllt wird, müssen die Gleichungen bestehen:

$$\text{(I)} \qquad 2c + \Delta_2 c = A_{11} + A_{22},$$
$$\text{(II)} \qquad 2d + \Delta_2 d = \tfrac{3}{2}(B_{11} + B_{22}).$$

Δ_2 ist der 2. Differentiator von Beltrami. Für eine auf der Einheitskugel definierte Funktion $u(\varphi, \psi)$ ist nämlich

$$\Delta_2 u \equiv u_{\varphi\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}u_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot u_{\psi\psi}.$$

Die Frage ist jetzt: Unter welchen Bedingungen existieren für die Differentialgleichungen (II) und (III) Lösungen, die auf der ganzen Einheitskugel stetig sind? Nur dann, so hatten wir früher erkannt, kann es geschlossene Flächen konstanter mittlerer Krümmung geben, die sich auf einen Punkt, den Nullpunkt, zusammenziehen lassen.

Eine solche inhomogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, wie (I) und (II), besitzt nur dann eine im ganzen Variabilitätsbereich stetige Lösung, wenn die zugehörige homogene Gleichung, die durch Nullsetzen der rechten Seite hervorgeht, keine Lösung hat, oder falls sie

Lösungen besitzt, wenn die Funktion auf der rechten Seite orthogonal ist zu den Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Man kann das leicht einsehen, indem man etwa linker Hand und rechter Hand nach Kugelfunktionen entwickelt ($u = \Sigma P_\nu$; wobei $\Delta_2 P_\nu + \nu(\nu-1) P_\nu = 0$) und vergleicht.

Die homogene Differentialgleichung $2u + \Delta_2 u = 0$ hat als einzige Lösung die Kugelfunktionen erster Ordnung P_1, d. h. $u = y_1, y_2, y_3$ (bei $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$), wie man durch Einsetzen von $u = \Sigma P_\nu$ erkennt. Die Gleichungen (I) und (II) besitzen somit nur dann auf der ganzen Einheitskugel stetige Lösungen, wenn

$$(53)\quad \begin{cases} 1. \displaystyle\int_{\Sigma y_i^2 = 1} (A_{11} + A_{22}) \cdot y_i \, dO = 0, \\ 2. \displaystyle\int_{\Sigma y_i^2 = 1} (B_{11} + B_{22}) \, y_i \, dO = 0. \end{cases}$$

Ein Blick auf (46) lehrt, daß die Orthogonalitätsbedingung 1. identisch erfüllt ist für jedes Wertsystem der $\alpha_{ik,rs}$.

Die Orthogonalitätsbedingung 2. ist dagegen nicht identisch erfüllt.

$\Sigma B_{\mu\mu}$ geht aus $\Sigma A_{\mu\mu}$ dadurch hervor, daß man die $\alpha_{ik,rs}$ in den $A_{\mu\mu}$ durch $\sum\limits_t \beta^{(t)}_{ik,rs} \cdot y_t$ ersetzt. Demgemäß ist nach (46)

$$(54)\qquad \sum B_{\mu\mu} = \sum_{i,k,t} \beta^{(t)}_{ik,ik} \, y_i^2 \, y_t - 2 \sum_{i,k,r,t} \beta^{(t)}_{ir,rk} \, y_i y_k y_t .$$

Es wird somit die zweite Orthogonalitätsbedingung:

$$(55)\qquad \int_{\Sigma y_i^2 = 1} \Big\{ \sum_{i,k,t} \beta^{(t)}_{ik,ik} \, y_i^2 \, y_t \cdot y_\nu - 2 \sum_{\substack{i,k,r,t \\ i \neq k}} \beta^{(t)}_{ir,rk} \, y_i y_k y_t y_\nu \Big\} dO = 0$$

für $\nu = 1, 2, 3$.

Von der ersten Summe verschwinden nun sämtliche Integrale bis auf die, für die $t = i = \nu$, und für die $i \neq \nu$, $t = \nu$ ist; und von der zweiten Summe bis auf die, für die $t = i$, $k = \nu$, und für die $t = k$, $i = \nu$ ist. Es wird somit (55):

$$(56)\quad \begin{cases} \displaystyle\int y_i^4 \, dO \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + \int y_i^2 y_\nu^2 \, dO \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} - 2 \int y_i^2 y_\nu^2 \, dO \Big(\sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(i)}_{ir,r\nu} + \sum_{\substack{r,k \\ k \neq \nu}} \beta^{(k)}_{\nu r,rk} \Big) = 0, \\ \displaystyle\int y_i^4 \, dO \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + \int y_i^2 y_\nu^2 \, dO \cdot \Big\{ \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu, k = \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} + \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu, k \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} - 2 \Big(\sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(i)}_{ir,r\nu} + \sum_{\substack{r,k \\ k \neq \nu}} \beta^{(k)}_{rk,\nu r} \Big) \Big\} = 0, \\ \displaystyle\int (y_i^4 + y_i^2 y_k^2) \, dO \cdot \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + 2 \int y_i^2 y_k^2 \, dO \cdot \Big\{ \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu, k \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} - \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(i)}_{ik,k\nu} - \sum_{\substack{i,k \\ k \neq \nu}} \beta^{(k)}_{ik,\nu k} \Big\} = 0. \end{cases}$$

Wir hatten früher, um der Metrik des Raumes ein Linienelement eindeutig zuzuordnen, Normierungen eingeführt, und zwar neben anderen die Normierungsgleichungen (31):

$$\beta^{(t)}_{ik,rs} + \beta^{(s)}_{ik,tr} + \beta^{(r)}_{ik,st} = 0.$$

Es ist also

$$-\beta^{(k)}_{ik,\nu i} - \beta^{(i)}_{ik,k\nu} = \beta^{(\nu)}_{ik,ik}.$$

Es wird somit (56):

$$\int (y_i^4 + y_i^2 y_k^2)\, dO \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + 4 \cdot \int y_i^2 y_k^2\, dO \cdot \sum_{\substack{ik \\ i \neq \nu,\, k \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} = 0 \tag{57}$$

für $\nu = 1, 2, 3.$

Für unseren vorliegenden Fall von 3 Dimensionen lautet (57) für $\nu = 1$ ausführlich geschrieben:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{16}{15}\pi\left(\beta^{(1)}_{12,12} + \beta^{(1)}_{31,31}\right) + \frac{16}{15}\pi\,\beta^{(1)}_{23,23} = 0, \\ \beta^{(1)}_{23,23} + \beta^{(1)}_{31,31} + \beta^{(1)}_{12,12} = 0, \\ \text{für } \nu = 2 \text{ und } \nu = 3 \\ \beta^{(2)}_{23,23} + \beta^{(2)}_{31,31} + \beta^{(2)}_{12,12} = 0, \\ \beta^{(3)}_{23,23} + \beta^{(3)}_{31,31} + \beta^{(3)}_{12,12} = 0. \end{array}\right. \tag{58}$$

Was bedeutet das nun für die Geometrie des Raumes? $\Sigma \alpha_{ik,ik}$ war die Ortsinvariante der Raumkrümmung, die $\alpha_{ik,rs}$ waren die Komponenten des Krümmungstensors im Nullpunkt, die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ deren Ableitungen in der y_t-Richtung (34). Es ist somit die Änderung der Ortsinvariante — der Gaußschen Krümmung des Raumes — bei einer Verrückung des Nullpunktes um $\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3$:

$$\begin{aligned} \delta K = {} & \left(\beta^{(1)}_{23,23} + \beta^{(1)}_{31,31} + \beta^{(1)}_{12,12}\right)\delta y_1 + \left(\beta^{(2)}_{23,23} + \beta^{(2)}_{31,31} + \beta^{(2)}_{12,12}\right)\delta y_2 \\ & + \left(\beta^{(3)}_{23,23} + \beta^{(3)}_{31,31} + \beta^{(3)}_{12,12}\right)\delta y_3. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (58) besagen also:

Im Nullpunkt muß die skalare, die Gaußsche Krümmung des Raumes stationär sein. Da der Nullpunkt ein beliebiger Raumpunkt war, so folgt der Satz:

Wenn es in einem Riemannschen Raum geschlossene Flächen konstanter mittlerer Krümmung gibt, die sich in der gekennzeichneten Weise zusammenziehen lassen, so hat notwendig der Raum überall die gleiche Gaußsche Krümmung.

Dieser Satz gilt nicht nur für einen Raum von 3 Dimensionen, er gilt in gleicher Weise auch für den n-dimensionalen Riemann-Raum. Das soll noch kurz gezeigt werden.

§ 11.

Die Flächen $\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots+\frac{1}{\rho_{n-1}}\right)=$ konst. im Raum von n Dimensionen.

Für den Raum von n Dimensionen läßt sich in ganz entsprechender Weise schließen wie für den dreidimensionalen. Nach (28a) ist die mittlere Krümmung der Fläche $x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$

$$\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\ldots+\frac{1}{\varrho_{n-1}}\right)=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\sum \gamma'_{\mu\nu}\,\frac{\Gamma_{\mu\nu}}{|\gamma_{\mu\nu}|}.$$

Für die Fläche $r=r(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1})$ ist nach (26a) und (49)

$$|\gamma_{\mu\nu}|=\begin{vmatrix} r_{\varphi_1}^2+G_{11}; & r_{\varphi_1}r_{\varphi_2}+G_{12}; & \ldots \\ r_{\varphi_1}r_{\varphi_2}+G_{12}; & r_{\varphi_2}^2+G_{22}; & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & r_{\varphi_{n-1}}^2+G_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Bedenkt man, daß die r_{φ_ν} von der Ordnung ϱ^3, die $G_{\mu\mu}$ von der Ordnung ϱ^2 und die $G_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ von der Ordnung ϱ^4 sind, so erkennt man leicht, daß bis zu der Näherung, die uns die Differentialgleichungen (II) und (III) lieferten, folgendes gilt: Die Glieder $\mu \neq \nu$ kommen neben den Gliedern $\mu=\nu$ nicht zur Geltung. Es ist [vgl. die Gleichungen (50), die sich gemäß (25) für n Dimensionen fortsetzen lassen]

$$\xi_1=-1+(\varrho^4)+\ldots$$

$$\xi_{\nu+1}=\frac{r_{\varphi_\nu}}{G_{\nu\nu}}+\ldots=\frac{\varrho}{s_1^2\ldots s_{\nu-1}^2}(c_{\varphi_\nu}+d_{\varphi_\nu}\varrho+\ldots);\quad (s_0=1)$$

Es ist weiter

$$\delta G_{\mu\mu}=\frac{\partial G_{\mu\mu}}{\partial r}\xi_1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\partial G_{\mu\mu}}{\partial\varphi_\nu}\xi_{\nu+1}$$

$$=-2\varrho\cdot s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{\mu-1}^2\cdot\Big\{1+\Big(c+2A_{\mu\mu}-\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1}-\frac{c_2}{s_2}\cdot\frac{1}{s_1^2}c_{\varphi_2}-\ldots\frac{c_{\mu-1}}{s_{\mu-1}}\cdot\frac{1}{s_1^2\ldots s_{\mu-2}^2}\cdot c_{\varphi_{\mu-1}}\Big)$$

$$+\Big(d+\frac{5}{2}B_{\mu\mu}-\frac{c_1}{s_1}d_{\varphi_1}-\frac{c_2}{s_2}\cdot\frac{1}{s_1^2}d_{\varphi_2}-\ldots\frac{c_{\mu-1}}{s_{n-1}}\cdot\frac{1}{s_1^2\ldots s_{n-2}^2}\cdot d_{\varphi_{n-1}}\Big)\Big\}$$

$$\underset{\mu\neq\nu}{\delta G_{\mu\nu}}=(\varrho^3)+\ldots$$

Nunmehr wird

$$\gamma'_{\mu\mu}=-\Big(2\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}\frac{\partial\xi_k}{\partial u_\mu}+\sum\delta g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}\frac{\partial x_k}{\partial u_\mu}\Big)$$

$$=-\Big(2G_{\mu\mu}\frac{\partial\xi_{\mu+1}}{\partial\varphi_\mu}+\ldots+\delta G_{\mu\mu}+\ldots\Big)$$

$$=-2\varrho^3\{c_{\varphi_\mu\varphi_\mu}+d_{\varphi_\mu\varphi_\mu}\varrho+\ldots\}-\delta G_{\mu\mu}$$

$$=2\varrho s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{\mu-1}^2\Big\{1+\varrho^2\Big(c+2A_{\mu\mu}-\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1}-\ldots\frac{c_{\mu-1}}{s_{\mu-1}}\frac{1}{s_1^2\ldots s_{\mu-2}^2}c_{\varphi_{\mu-1}}-\frac{1}{s_1^2\ldots s_{\mu-1}^2}\cdot c_{\varphi_\mu\varphi_\mu}\Big)$$

$$+\varrho^3(d+\ldots).$$

Da schließlich

$$\frac{\Gamma_{\mu\mu}}{|\gamma_{\mu\nu}|} = \frac{1}{G_{\mu\mu}} = \frac{1}{\varrho^2 \cdot s_1^2 \ldots s_{\mu-1}^2} \cdot \{1 - (2c + A_{\mu\mu})\varrho^2 - (2d + B_{\mu\mu})\varrho^3 - \ldots\}$$

zu setzen ist, so bekommen wir die Identität

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\Big\{1 - \frac{\varrho^2}{n-1}\Big((n-1)c + (n-2)\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1} + \frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2}c_{\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \ldots s_{n-3}^2} \cdot \frac{c_{n-2}}{s_{n-2}} c_{\varphi_{n-2}}$$

$$+ c_{\varphi_1\varphi_1} + \frac{1}{s_1^2} c_{\varphi_2\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \ldots s_{n-2}^2} c_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}} - \Sigma A_{\mu\mu}\Big)$$

$$+ \Big((n-1)d + (n-2)\frac{c_1}{s_1} d_{\varphi_1} + \frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2} d_{\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-3}^2}\frac{c_{n-2}}{s_{n-2}} d_{\varphi-2}$$

$$+ d_{\varphi_1\varphi_1} + \frac{1}{s_1^2} d_{\varphi_2\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-2}^2} \cdot d_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}} - \frac{3}{2}\Sigma B_{\mu\mu}\Big) + \ldots$$

Koeffizientenvergleichung liefert:

$$\text{(I)}\quad (n-1)c + (n-2)\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1} + \frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2}c_{\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-3}^2}\frac{c_{n-2}}{s_{n-2}} \cdot c_{\varphi_{n-2}}$$

$$+ c_{\varphi_1\varphi_1} + \frac{1}{s_1^2} c_{\varphi_2\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-2}^2} c_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}} = \Sigma A_{\mu\mu}.$$

$$\text{(II)}\quad (n-1)d + (n-2)\frac{c_1}{s_1}d_{\varphi_1} + \frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2}d_{\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-3}^2}\frac{c_{n-2}}{s_{n-2}} d_{\varphi_{n-2}}$$

$$+ d_{\varphi_1\varphi_1} + \frac{1}{s_1^2} d_{\varphi_2\varphi_2} + \ldots \frac{1}{s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-2}^2} d_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}} = \frac{3}{2}\Sigma B_{\mu\mu}.$$

Und das sind genau dieselben Differentialgleichungen für den Raum von n Dimensionen, wie wir früher für den dreidimensionalen gefunden hatten. Wir können schreiben:

$$\text{(I)}\qquad (n-1)c + \Delta_2 c = \Sigma A_{\mu\mu},$$

$$\text{(II)}\qquad (n-1)d + \Delta_2 d = \tfrac{3}{2}\Sigma B_{\mu\mu}.$$

Darin ist $\Delta_2 u$ wieder der 2. Differentiator für die auf der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel definierte Funktion $u(\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1})$.

Entwickelung nach Kugelfunktionen ($u = \Sigma P_\nu$; wobei jetzt $\Delta_2 P_\nu + \nu(\nu + n - 2)P_\nu = 0$ [7])) liefert die gleichen Schlüsse wie früher. Die einzige Lösung der homogenen Gleichung $(n-1)u + \Delta_2 u = 0$ ist die erste Kugelfunktion. Denn die Differentialgleichung der Kugelfunktionen, in sie eingeführt, gibt für ν die Gleichung:

$$\nu(\nu + n - 2) = n - 1,$$

aus der $\nu = 1$ folgt.

Es müssen also einerseits $\Sigma A_{\mu\mu}$, andererseits $\Sigma B_{\mu\mu}$ zu sämtlichen y_i orthogonal sein, wenn jede der Gleichungen (I) und (II) eine auf der ganzen Einheitskugel stetige Lösung haben soll. Die Bedingungen dafür hatten

[7]) Vgl. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 1 (1878), S. 461.

wir bereits, auch für n Dimensionen gültig, gefunden. Sie sind durch (57) ausgedrückt, wo jetzt ν von 1 bis n läuft.

Es ist nun wegen $(\Sigma y_i^2)^2 = 1$

$$\int y_i^4 dO + (n-1)\int y_i^2 y_k^2 = \frac{O}{n},$$

worin O die Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel bedeutet:

$$O = \int\limits_{\varphi_1=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi_2=0}^{\pi} \cdots \int\limits_{\varphi_{n-2}=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi_{n-1}=0}^{2\pi} s_1^{n-2} \cdot s_2^{n-3} \cdots s_{n-2} \cdot d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1}.$$

Ferner ist

$$\int y_i^4 dO = \int y_1^4 dO = \int c_1^4 \cdot s_1^{n-2} \cdot s_2^{n-3} \cdots s_{n-2} d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1} = \frac{3O}{n(n+2)},$$

so daß

$$\int y_i^2 y_k^2 dO = \frac{O}{n(n+2)}$$

und

$$\int (y_i^4 + y_i^2 y_k^2) dO = 4 \int y_i^4 y_k^2 dO$$

und damit wird die Bedingung für die $\beta_{ik,rs}^t$ (57)

$$\sum_k \beta_{\nu k,\nu k}^{(\nu)} + \sum_{i \neq \nu,\, k \neq \nu} \beta_{ik,ik}^{(\nu)} = 0,$$

was für die Metrik des n-dimensionalen Raumes die gleiche Bedeutung hat wie die Gleichungen (58) für den Raum von 3 Dimensionen.

Damit ist der Satz allgemein bewiesen.

Mathematisches Seminar der Hamburgischen Universität, Oktober 1920.

(Eingegangen am 31. 10. 1920.)

Ein Minimumproblem für Ovale.

Von

Julius Pál in Györ (Ungarn).

---

1. Herr Prof. Fujiwara (Sendai, Japan) hatte die Güte, meine Aufmerksamkeit auf folgende Frage zu lenken:

Unter allen Ovalen, in welchen man die Einheitsstrecke wenden kann, ist dasjenige festzustellen, dessen Flächenmaß möglichst klein ist.

In voller Ausführlichkeit und Präzision ist die Frage die folgende: Ein Oval C ist zur Konkurrenz zugelassen, wenn in demselben zwei stetige Kurven

$$(1) \qquad x = f(t),\ y = g(t) \quad \text{und} \quad x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

verlaufen, für welche

$$(1a) \qquad [f(t) - \varphi(t)]^2 + [g(t) - \psi(t)]^2 = \text{konst.} = 1$$

und

$$(1b) \qquad f(0) = \varphi(1),\ f(1) = \varphi(0), \quad g(0) = \psi(1),\ g(1) = \psi(0)$$

ist.

Unter diesen Ovalen C ist dasjenige festzustellen, dessen Flächenmaß

$$\gamma = \gamma(C)$$

minimalen Wert hat.

Herr Fujiwara vermutet, daß die gesuchte Minimalfigur das gleichseitige Dreieck mit der Höhe 1 ist. In dieser Arbeit werde ich nachweisen, daß diese Vermutung in der Tat zutrifft.

2. Es sei H ein Oval, a eine Gerade seiner Ebene,

$$(2) \qquad d = d(H, a)$$

bedeute die Entfernung der beiden zu a parallelen Stützgeraden von H und

$$\delta = \delta(H)$$

sei die kleinste der Zahlen (2). Dann wird bekanntlich δ die *Dicke des Ovals* H genannt.

Die laut (1) gewendete Einheitsstrecke wird in einem Zeitmoment senkrecht auf a stehen; daher ist für jedes C und a

$$d(C, a) \geqq 1$$

und für jedes C

$$\delta(C) \geqq 1.$$

3. Wir werden nun beweisen:

Satz I. *Ist für das Oval H*

$$\delta(H) \geqq 1,$$

so ist sein Flächenmaß

$$\gamma(H) \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{3}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn H das Fujiwara-Dreieck ist.

Hieraus folgt a fortiori:

Satz II. *Das Fujiwara-Dreieck ist eine und die einzige flächenminimale Figur unter den Ovalen C.*

Im folgenden bezeichne G stets ein Oval mit der Dicke

$$\delta(G) = 1.$$

Es genügt, die Ungleichheit (3) für Ovale G zu beweisen. Ist nämlich

$$\delta(H_1) > 1,$$

so sei G_1 das zu H_1 ähnliche, kleinere Oval mit

$$\delta(G_1) = 1.$$

Aus

$$\gamma(G_1) \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

folgt dann

$$\gamma(H_1) > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. Es sei N irgendein Oval, r der Radius eines in der abgeschlossenen Ovalscheibe verlaufenden Kreises. Unter den Zahlen r gibt es eine größte; sie soll

$$\varrho = \varrho(N)$$

heißen; man hat unmittelbar

$$\varrho(N) \leqq \tfrac{1}{2}\delta(N).$$

In einer schönen, kleinen Arbeit hat Herr Blaschke [1]) bewiesen, daß

$$\varrho(N) \geqq \tfrac{1}{3}\delta(N) \tag{4}$$

ist. Von der Ungleichung (4) werde ich im folgenden wesentlichen Gebrauch machen.

---

[1]) Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. 23 (1915), S. 369.

5. Die Ungleichung (3) ist gewiß erfüllt für Ovale G mit

$$\pi \varrho^2 > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

oder

$$\varrho = \varrho(G) > \sqrt{\frac{1}{\pi\sqrt{3}}} = r_0 \qquad (r_0 < \tfrac{1}{2}).$$

Wir betrachten also nur Ovale G mit

$$(5) \qquad \delta(G) = 1 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{3} \leqq \varrho \leqq r_0 \qquad (r_0 < \tfrac{1}{2}).$$

Für ein Oval N mit

$$\varrho(N) < \frac{\delta(N)}{2},$$

also gewiß für ein Oval G, welches die Bedingung (5) erfüllt, gilt nach der eben zitierten Arbeit des Herrn Blaschke:

„Es gibt einen einzigen auf G verlaufenden Kreis vom Radius $\varrho(G)$; dieser heiße g, sein Mittelpunkt O. Es gibt zumindest ein spitzwinkliges Dreieck, dessen Ecken sowohl auf der Kreislinie g, wie auf der Ovallinie G liegen."

Fixieren wir ein solches Dreieck; es soll PQR heißen. Die Kreistangenten in P, Q und R berühren auch die Ovallinie G und bilden ein Dreieck $P_1Q_1R_1$, welches das Oval G enthält.

Das Dreieck $P_1Q_1R_1$ wird durch den Kreis g in vier Stücke zerschnitten, die der Reihe nach I, II, III, IV heißen sollen (siehe Fig. 1); jedes dieser Stücke enthält ein Stück des Ovals. Die Flächenmasse dieser vier Stücke seien γ_1, γ_2, γ_3, γ_4; es ist

$$\gamma_4 = \pi \varrho^2.$$

Für die Zahlen γ_1, γ_2, γ_3 will ich jetzt untere Schranken feststellen.

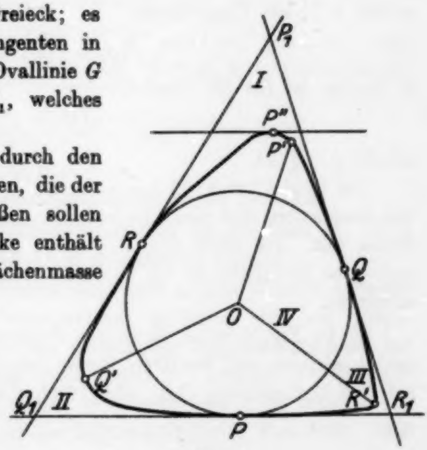

Fig. 1.

6. Auf der zu Q_1R_1 parallelen Stützgeraden fixiere ich einen Punkt P'' der Ovallinie; er liegt höher als jeder Kreispunkt (wegen $\varrho < \frac{1}{2}$) und folglich auf I; wegen $\delta(G) = 1$ ist seine Entfernung von O zumindest $1 - \varrho$. Aus

$$OQ = \varrho < 1 - \varrho \leqq OP''$$

folgt, daß der auf I fallende Bogen QP'' zumindest einen Punkt enthält, dessen Entfernung von O genau $1 - \varrho$ ist; es sei P' ein solcher Punkt.

Entsprechend fixiere ich auf *II* und *III* fallende Punkte Q' und R' der Ovallinie mit den Radienvektoren

$$OP' = OQ' = OR' = 1 - \varrho .$$

Die kleinste konvexe Figur, die den Kreis g und das Dreieck $P'Q'R'$ aufnimmt, besteht aus dem Kreis und drei dem Kreise aufgesetzten Kappen. Die Kappen liegen getrennt auf *I*, *II* und *III*. Eine der Kappen hat das Flächenmaß

$$\varrho\sqrt{1-2\varrho} - \varrho^2 \arccos \frac{\varrho}{1-\varrho}$$

und folglich ist

$$(6) \qquad \begin{aligned} \gamma(G) &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\ &\geqq \pi\varrho^2 + 3\varrho\sqrt{1-2\varrho} - 3\varrho^2 \arccos \frac{\varrho}{1-\varrho} = f(\varrho), \end{aligned}$$

wo ϱ statt $\varrho(G)$ steht, und unter arc cos der übliche Hauptwert verstanden wird.

7. Für die Werte

$$\tfrac{1}{3} < \varrho < \tfrac{1}{2}$$

erfüllt $f(\varrho)$ die Ungleichung

$$(7) \qquad f(\varrho) > f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

A fortiori ist für ein Oval G

$$\gamma(G) > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

sobald $\varrho > \frac{1}{3}$ ist.

Die Ungleichung (7) beweist man z. B. so, daß man $f'(\varrho)$ berechnet und konstatiert, daß dieser Differentialquotient für $\frac{1}{3} < \varrho < \frac{1}{2}$ stets positive Werte hat. Ich ziehe vor, (7) durch eine elementar-geometrische Über) legung zu beweisen, da ein solcher Beweis der Natur der Frage viel mehr entspricht.

8. In Fig. 2 ist $A_0B_0C_0$ das Fujiwara-Dreieck, O sein Mittelpunkt; um O schlagen wir den Kreis g mit dem Radius ϱ, $\frac{1}{3} < \varrho < \frac{1}{2}$ und tragen auf den Halbstrahlen OA_0, OB_0, OC_0 die Strecken

$$OA = OB = OC = 1 - \varrho$$

auf; die kleinste konvexe Figur, die den Kreis g und das Dreieck ABC aufnimmt, heiße F. Das Flächenmaß von F ist $f(\varrho)$, dasjenige von $\triangle A_0B_0C_0$ ist $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

F enthält das Dreieck $A_0B_0C_0$ bis auf sechs kleine, untereinander kongruente Dreiecke; eines dieser Dreiecke ist B_0BD. Wir wollen zeigen, daß das, was von F *außerhalb* $\triangle A_0B_0C_0$ liegt, *flächengrößer* ist, als $6 \times \triangle B_0BD$.

Der Mittelpunkt von $A_0 B_0$ heißt C_1. Wir zeichnen $C_1 E$ parallel, gleichgerichtet und gleichlang mit $A A_0$; E liegt auf der Kreisscheibe g, da $C_1 E = A_0 A = \varrho - \frac{1}{3}$ der Minimalabstand der beiden konzentrischen Kreislinien ist. M ist der Schnittpunkt von $C_1 A$ und $E A_0$. Das Dreieck $C_1 E M$ liegt außerhalb $\triangle A_0 B_0 C_0$, das ihm kongruente $\triangle A A_0 M$ enthält als *wirklichen* Teil eines der zu kompensierenden sechs Dreiecke. Damit ist also (7) bewiesen.

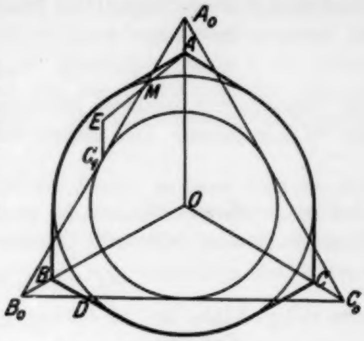

Fig. 2.

9. Zu besprehen sind noch die Ovale G mit

$$\delta(G) = 1 \quad \text{und} \quad \varrho(G) = \tfrac{1}{3}.$$

Es gibt aber nur *ein einziges* solches Oval, nämlich das Fujiwara-Dreieck. Für $\varrho = \frac{1}{3}$ ist nämlich (Fig. 1)

$$OP' = OQ' = OR' = \tfrac{2}{3},$$

und g wird von jedem der Punkte P', Q', R' unter 60^0 gesehen. Also sind PQR und $P_1 Q_1 R_1$ gleichseitige Dreiecke; $\triangle P_1 Q_1 R_1$ hat aber keinen wirklichen konvexen Teil G mit

$$\delta(G) = 1,$$

d. h. G ist das ganze Dreieck $P_1 Q_1 R_1$.

Damit sind die in 3. ausgesprochenen Sätze I—II bewiesen.

10. Der Satz I sagt nur scheinbar mehr aus als der Satz II; denn *die Einheitsstrecke kann in jedem Oval G gewendet werden.*

Dieser wohl von niemandem bezweifelte, doch meines Wissens nirgends sorgfältig besprochene Satz ist unmittelbar ersichtlich für ein „reguläres“ G, welches weder Ecken noch geradlinige Begrenzungsstücke hat und dessen Tangentenrichtung sich stets ändert [*]). Dagegen ist es nicht so einfach zu zeigen, daß das Wenden im *allgemeinen* Oval möglich ist. Der einfachste Beweis scheint mir die folgende explizite Vorschrift, nach welcher das Wenden vorgenommen werden kann:

11. Die Punkte $A(x = a, y = 0)$ und $B(x = b, y = 0)$ seien Endpunkte eines Durchmessers von G. Die beiden durch A und B begrenzten Bogen der Ovallinie seien durch

---

[*]) Es seien A, A' und P, P' die Berührungspunkte eines G umschriebenen Parallelogramms. Durchläuft P den Bogen AA' in positivem Sinne, so durchläuft P' den Bogen $A'A$ ebenfalls in positivem Sinne, und es ist $PP' \geq 1$. Also kann die auf AA' gezeichnete Einheitsstrecke gewendet werden.

$$y = f(x),\ f(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad y = g(x),\ g(x) \leqq 0 \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

dargestellt.

Im Viereck $a \leqq \xi \leqq b$, $a \leqq \eta \leqq b$ der (ξ, η)-Ebene definiere ich eine Punktmenge σ wie folgt: Der Punkt (ξ, η) gehöre dann und nur dann zu σ, wenn die Punkte

$$x = \xi,\quad y = f(\xi) \quad \text{und} \quad x = \eta,\quad y = g(\eta)$$

der Ovallinie auf parallelen Stützgeraden des Ovals liegen. Die Menge σ ist ein Kontinuum. Der höchste auf $\xi = \xi_0$ liegende Punkt von σ sei

$$\eta_0 = k(\xi_0).$$

Zufolge der Konvexität von G ist $k(\xi)$ eine monoton nicht zunehmende Funktion, und so bilden die Strecken

$$k(\xi - 0) \leqq \eta \leqq k(\xi + 0) \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

eine stetige Linie, die die Punkte

$$\xi = a,\quad \eta = b \quad \text{und} \quad \xi = b,\quad \eta = a$$

verbindet. Durchläuft man diese nach einem Gesetz

$$\xi = \xi(\tau),\quad \eta = \eta(\tau) \qquad (0 \leqq \tau \leqq 1),$$

so entspricht der stetigen Änderung von τ eine sich stetig bewegende Sehne des Ovals; dieser Sehnenbewegung folgend kann die auf AB gelegene Einheitsstrecke gewendet werden.

Man kann kürzer wie folgt schließen: Der Durchschnitt von σ mit einer Geraden $\xi = \xi_0$ oder einer Geraden $\eta = \eta_0$ ist ein Punkt oder eine Strecke. Hieraus folgt, daß σ „zusammenhängend im Kleinen"[3]), folglich selbst eine stetige Linie ist. Es mag hinzugefügt werden, daß *irgendeine* auf G gezogene Strecke PQ von der Länge 1 auf G gewendet werden kann. Denn eine auf G gewendete Strecke nimmt eine zu PQ parallele Lage gewiß an, und parallel-gleiche Strecken von G können auf G ineinander verschoben werden.

12. Die zur besprochenen duale Frage ist:

Unter den Ovalen G ist dasjenige festzustellen, dessen Umfang minimal ist.

Der minimale Umfang ist π, er kommt aber nicht *einer* Figur zu, sondern allen mit der konstanten Breite 1. Dieses folgt, wie Herr Blaschke[4]) gelegentlich bemerkte, unmittelbar aus der Cauchyschen Formel, welche den Umfang des Ovals mit Hilfe der Stützwinkelfunktion ausdrückt.

---

[3]) Siehe Hahn, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. **23** (1915), S. 318, und Sitzungsber. der Wiener Akademie **123**, IIa.

[4]) Berichte der Sächsischen Akad. Leipzig, **67**, S. 296.

13. Versucht man die Einheitsstrecke zu wenden, und brachte man sie dabei schon in die Lage AB, so braucht man für den *momentanen* Zweck, die Strecke nach rechts oder links weiter zu drehen, nur den auf AB senkrechten Streifen von der Breite 1. Dadurch verfällt man leicht auf den Gedanken, diese „Differentialbedingung" zu integrieren und die Minimalfigur unter den Ovalen mit der konstanten Breite 1 zu suchen. Dieser Plausibilitätsschluß erweist sich also für das Problem des kleinsten Umfangs als richtig, ist aber irreführend für das Problem der kleinsten Fläche.

14. Ist Y eine *nicht konvexe* Jordan-Kurve, so kann man ihr eine konvexe Kurve von kleinerem Umfang umschreiben. Fragt man daher nach der Jordan-Kurve kleinsten Umfangs, in welcher man die Einheitsstrecke wenden kann, so kann man sich von vornherein auf konvexe Kurven beschränken.

Es gibt aber nicht konvexe Jordan-Kurven, in welchen man die Einheitsstrecke wenden kann und die flächenkleiner sind als das Fujiwara-Dreieck. So begrenzt z. B. in Fig. 3 die stark ausgezogene Linie eine Figur, die ein wirklicher Teil des Fujiwara-Dreiecks ist und in welchem man schon wenden kann. (In der Figur sind die Mittelpunkte der drei Kreisbogen die Ecken des Dreieckes.) Daher ist es sinngemäß, die in 1. formulierte Aufgabe zu der folgenden zu erweitern:

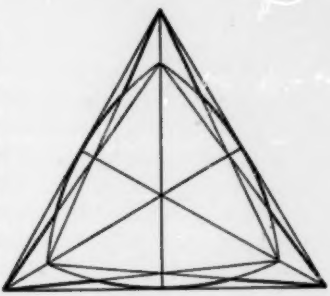

Fig. 3.

Es sei Y eine durch eine Jordan-Kurve begrenzte Scheibe, auf welcher man die Einheitsstrecke wenden kann. Es ist die flächenminimale unter den Scheiben zu bestimmen.

Diese Aufgabe scheint mir recht schwierig. Nicht nur, weil ein Ansatz, der die Variationsrechnung zur Hilfe herbeiriefe, nicht möglich ist, sondern auch, weil man über die allgemeine Jordan-Kurve nur topologisch, aber gar nicht metrisch Bescheid weiß. Es wollte mir nicht einmal gelingen festzustellen, welche von den Jordan-Scheiben Y, welche auf dem Fujiwara-Dreieck liegen, flächenminimal ist. Da außerdem ein Konvergenzsatz, wie er für konvexe Kurven von Herrn Blaschke[6]) gefunden wurde, allgemein für Jordan-Kurven nicht besteht, bleibt auch die Existenz einer Minimalscheibe fraglich.

[6]) Siehe Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 62.

15. Ich möchte noch sagen, wie die besprochene Frage in einen Kreis von schwierigen Problemen sich einordnet.

Es seien C und c zwei Ovale; es sei möglich, c stetig so zu bewegen, daß es stets in C bleibt, während die Arcus-Änderung eines mit c starr verbundenen Halbstrahles 2π beträgt. Dann wollen wir sagen, daß c in C ganz gewendet werden kann.

Man sieht ohne weiteres, daß dann als Anfangslage von c jede auf C mögliche Lagerung von c vorgeschrieben werden kann.

An diesen Begriff vom ganzen Wenden knüpfen sich zwei Gruppen von Fragen:

I. Gegeben ist ein Oval C. Man betrachtet alle in C ganz wendbaren Ovale c und fragt nach demjenigen c, für welches diese oder jene wichtige Ovalfunktion $f = f(c)$, $g = g(c)$, ... extremalen Wert hat.

So hat z. B. Herr Kakeya[6]) mit einfachen Mitteln gezeigt, daß bei fixiertem C das flächenmaximale c kreisförmig ist. Für den Beweis braucht man nur die klassische Isoperimetrie der Kreislinie, die Cauchysche Formel für den Umfang des Ovals und den Satz, daß unter den Ovalen gegebenen Durchmessers der Kreis flächenmaximal ist.

II. Fixiert sei das Oval c. Man betrachtet alle C, in welchen c ganz gewendet werden kann. Gesucht wird dasjenige C, für welches eine wichtige Ovalfunktion $f = f(C)$ extremalen Wert hat.

So kann man z. B. bei gegebenem c nach dem flächenminimalen C fragen. Diese Frage ist gelöst für den bescheidenen Spezialfall, daß c die Einheitsstrecke ist. Aber schon die nächst einfachen Fälle bieten wesentliche Schwierigkeiten. Fragt man z. B. nach dem flächenkleinsten C, in welchem man das Einheitsquadrat ganz wenden kann, so ist es überaus wahrscheinlich, daß die gesuchte Minimalfigur der umschriebene Kreis ist; aber es scheint mir, daß ein Beweis mit einfachen Mitteln nicht möglich ist.

16. Die formulierten Wendungsaufgaben führen zu einer natürlichen Verallgemeinerung der Kurven konstanter Breite.

Man betrachte eine Kurve, die im regulären n-Eck ganz wendbar ist, die aber beim Wenden in jedem Zeitmoment an alle Seiten des Polygons anstößt. Es sei c_n eine solche Kurve; im speziellen ist c_4 ein Oval konstanter Breite.

Die Kurven c_n wurden von den Herren Meißner[7]), Kakeya[8]) und Fujiwara[8]) nach verschiedenen Richtungen untersucht.

[6]) Some Problems on Maxima and Minima regarding Ovals. Science Reports of the Tôhoku Imp. University 6, Nr. 2. Sendai (1917).

[7]) Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellsch. in Zürich (1909).

[8]) Science Reports of the Tôhoku Imp. University 4 (1915) und 8 (1919); ferner The Tôhoku Mathem. Journal 11 (1917).

Betrachten wir alle Kurven c_4 mit normierter Größe (etwa der Breite 1) und fragen wir, für welche unter diesen Kurven die wichtigen Ovalfunktionen zum Extremum werden. Als Extremumfigur erhalten wir für die meisten Ovalfunktionen den Kreis oder das Reuleaux-Dreieck[8, 9]).

Unter den Kurven c_3 (mit normierter Größe) tritt sehr oft ein Kreisbogenzweieck als Extremumfigur auf[9]); dieses Zweieck mit dem umgebenden (normierten) Dreieck ist in Fig. 4 dargestellt.

Das gleichseitige Dreieck ist das flächenkleinste Oval, in welchem dieses Zweieck gewendet werden kann. Jede Figur vom Durchmesser 1, welche im Fujiwara-Dreieck gewendet werden kann, ist ein Teil dieses Zweieckes.

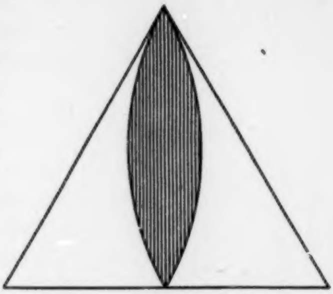

Fig. 4.

Bei der Verfolgung der Analogie der Kurven c_3 und c_4 wird man auf folgendes aufmerksam: Es gibt durchaus reguläre (z. B. algebraische) Ovale, welchen man in jeder Richtung ein Quadrat umschreiben kann, ohne daß sie von konstanter Breite wären.

17. Die Tatsache, daß die Einheitsstrecke in jedem Oval H mit $\delta(H) \geqq 1$ gewendet werden kann, führt zu folgender Fragestellung:

Der Halbstrahl a sei mit dem Oval c starr verbunden; es sei möglich, c so in das Oval C zu legen, daß a eine willkürlich vorgeschriebene Richtung hat. Folgt hieraus, daß c auf C ganz gewendet werden kann?[10])

Legt man c auf C, so entspricht dieser Lagerung ein Punkt (ξ, η, ζ), wobei etwa ξ und η die Koordinaten des Anfangspunktes von a, ζ die Richtung von a bedeute $[0 \leqq \zeta \leqq 2\pi]$. Die allen möglichen Lagerungen entsprechenden Punkte (ξ, η, ζ) bilden eine Menge σ und die Frage ist, ob σ im Kleinen zusammenhängt.

Jeder ebene Schnitt $\zeta =$ konst. von σ ist ein konvexer Bereich, dieses allein genügt aber nicht zum Zusammenhang im Kleinen.

Kjøbenhavn, Sept. 1920.

---

[9]) Blaschke, Math. Ann. 76 (1915).

[10]) Zusatz bei der Korrektur: Diese Frage ist, wie mir Herr Harald Bohr freundlichst mitteilt, bejahend zu beantworten. Herr Bohr untersucht nicht den Zusammenhang im Kleinen, sondern kommt mit einfachen Überlegungen über Konvexes zur bejahenden Antwort.

(Eingegangen am 15. 11. 1920.)